# Contents

# Chapter 1

# VECTORES

Las n-uplas de numeros reales se denominan vectores y, generalmente, se simbolizan por letras mayúsculas. Así.

$$\mathbf{A} = (1, 3, 2) \quad , \quad \mathbf{B} = (1, -1) \quad , \quad \mathbf{C} = (x_1, x_2, x_3)$$

son vectores.

Dos vectores **A** y **B** se dice que son iguales si y sólo si sus correspondientes vectores son iguales.

## 1.1 SUMA DE VECTORES

La suma de dos vectores **A** y **B** se obtiene sumando las correspondientes componentes de **A** y **B**. Así, si

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, ..., a_n) \text{ y } \mathbf{B} = (b_1, b_2, ..., b_n)$$

entonces

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$$

**Example 1** *Si* $\mathbf{A} = (1, 3, 2)$ *y* $\mathbf{B} = (3, -2, 1)$ *entonces*

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (1 + 3, 3 - 2, 2 + 1) = (4, 1, 3)$$

## 1.2 PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

El producto de un vector **A** por un número $c$ se obtiene multiplicando cada componente de **A** por el número $c$. Así, si

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

entonces

$$c\mathbf{A} = (ca_1, ca_2, ..., ca_n)$$

**Example 2** *Si* $\mathbf{A} = (1, -2, 3)$ *entonces* $3\mathbf{A} = (3, -6, 9)$.

## 1.3 PROPIEDADES

Como las anteriores operaciones se realizan sobre las componentes de los vectores, estas operaciones tienen propiedades análogas a las que tienen los números reales.

Si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ son vectores y $a$, $b$ son números, entonces

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
3. El vector $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$ es tal que $\mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$.
4. Dado cualquier vector $\mathbf{A}$, existe el vector $-\mathbf{A}$ tal que
$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = 0$$
5. $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$.
6. $(ab)\,\mathbf{A} = a\,(b\mathbf{A})$
7. $(a + b)\,\mathbf{A} = a\mathbf{A} + b\mathbf{A}$
8. $a\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B}$

Las anteriores propiedades se demuestran fácilmente por cálculo directo.

La sustracción entre dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se define por:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

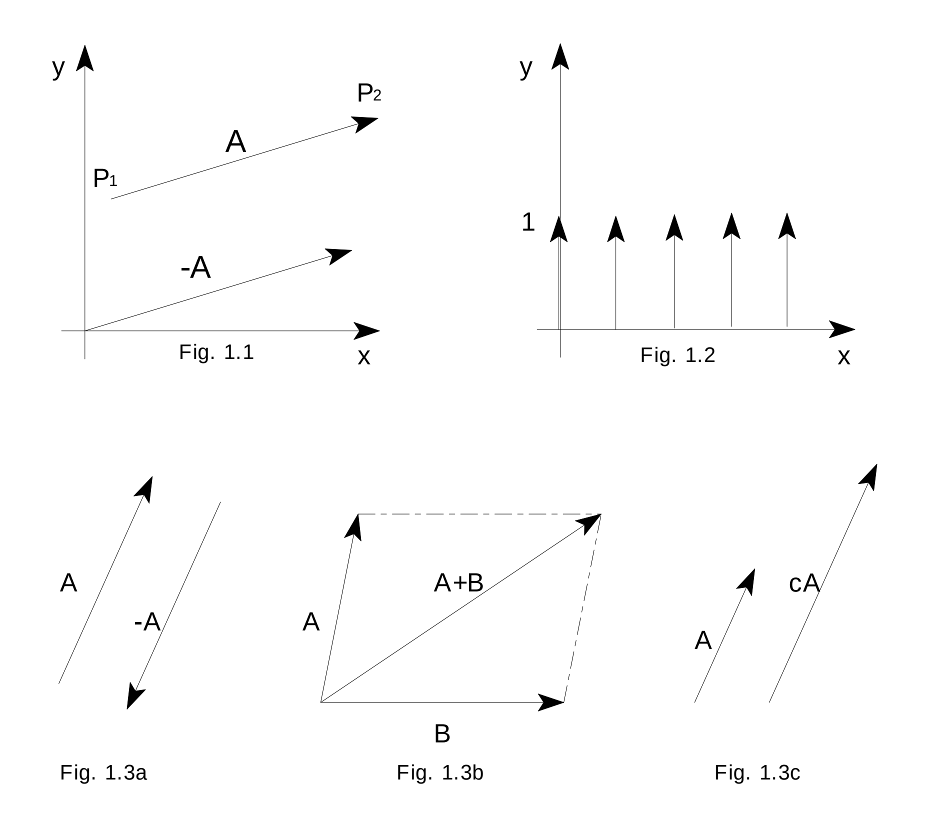
así,

$$(1, 3, 5) - (1, 4, 3) = (1 - 1, 3 - 4, 5 - 3) = (0, -1, 2)$$

## 1.4 PRESENTACION GRAFICA

Si los vectores tienen dos componentes o tres, es muy conveniente representarlos mediante flechas o segmentos dirigidos en el plano cartersiano o en el espacio cartesiano, respectivamente.

En general, para hallar la representación gráfica de un vector $\mathbf{A} = (x, y)$ en el plano cartesiano se procede así: Tomamos un punto cualquiera $P_1$ de dicho plano, luego nos desplazamos horizontalmente $x$ unidades (hacia la derecha si $x$ es positivo y hacia la izquierda si $x$ es negativo); y a continuación nos desplazamos $y$ unidades verticalmente (hacia arriba si $y$ es positivo y hacia abajo si $y$ es negativo). Llamemos $P_2$ al nuevo punto del plano así localizado. Entonces la flecha que va desde $P_1$ hasta $P_2$ es la representación gráfica del vector $\mathbf{A}$ (ver figura 1.1).




Para representar gráficamente vectores de tres componentes en el espacio se procede de manera similar al de los vectores de dos componentes en el plano.

Debido a que el punto de partida $P_1$ es arbitrario, un mismo vector puede estar representado por distintas flechas.

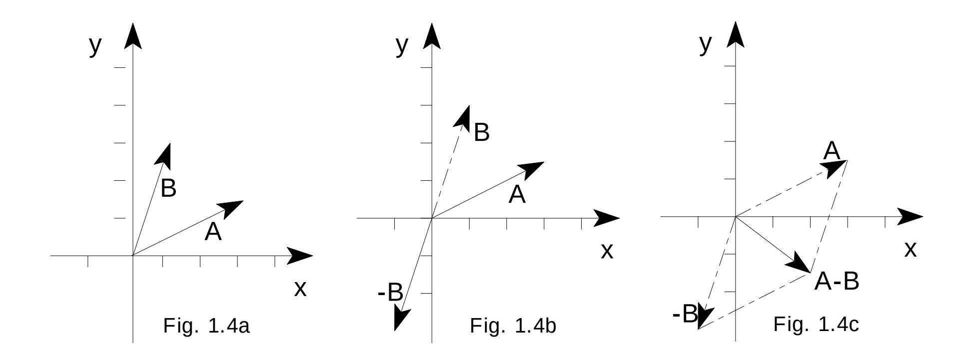
Si como punto de partida se toma el origen de coordenadas, la representación gráfica del vector **A** se denomina también radio vector.

**Example 3** *Todas las flechas de la figura 1.2. representan al vector* $(0, 1)$*, pero solamente una de ellas es un radio vector.*

En general, de todas las flechas que representan a un vector se prefiere trabajar con la flecha que parte del origen de coordenadas.

Como consecuencia de lo anterior se obtienen las siguientes representaciones gráficas:

La flecha $-\mathbf{A}$ se obtiene cambiando el sentido a la flecha **A**. Para obtener la flecha $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ se traza un paralelogramo y se unen las aristas opuestas como en la figura 1.3b. La flecha $c\mathbf{A}$ es paralela a la flecha **A** y su longitud es $|c|$ veces la longitud de **A**; si $c > 0$ las flechas tienen el mismo sentido, y si $c < 0$ las flechas tienen sentido opuesto.




**Example 4** *Calcular graficamente* $\mathbf{A}-\mathbf{B}$*, si* $\mathbf{A}=(3,2)$ *y* $\mathbf{B}=(2,5)$*. Los pasos se muestran en las tres siguientes figuras:*

## 1.5 PARALELISMO DE VECTORES

Dos vectores son paralelos si uno de ellos es múltiplo del otro. Es decir:

$\mathbf{A}$ paralelo a $\mathbf{B}$ si $\mathbf{A}=c\mathbf{B}$ (o $\mathbf{B}=c\mathbf{A}$), donde $c$ es un número.

Es claro que según esta definición el vector cero es paralelo a cualquier vector (tomar $\mathbf{A}=0$ y $c=0$).

Si $c>0$, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen el mismo sentido, si $c<0$ tienen sentidos opuestos.

**Example 5** *a) Los vectores* $\mathbf{A}=(1,2,4)$ *y* $\mathbf{B}=(2,4,8)$ *son paralelos pues* $\mathbf{B}=2\mathbf{A}$*. b) Los vectores* $\mathbf{A}=(1,2,4)$ *y* $\mathbf{B}=(1,-3,2)$ *no son paralelos.*

## 1.6 LONGITUD DE UN VECTOR

La longitud o módulo del vector $\mathbf{A}=(x_1,x_2,...,x_n)$, simbolizado por $|\mathbf{A}|$, es el número

$$|\mathbf{A}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}$$

Geométricamente, el número $|\mathbf{A}|$ da la longitud de la flecha que representa gráficamente al vector $\mathbf{A}$. Cuando un vector tiene módulo 1 se llama vector unitario.

Los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ son unitarios; para simplificar en algunos casos los cálculos, y por ser muy utilizados, frecuentemente se simbolizan por $\hat{\imath}=(1,0,0)$, $\hat{\jmath}=(0,1,0)$ y $\hat{k}=(0,0,1)$.

**Example 6** *a) El módulo del vector* $\mathbf{A}=(4,3)$ *es*

$$|\mathbf{A}|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$$

*b) El vector* $\dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}=\dfrac{1}{5}(4,3)=\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{5}\right)$ *es unitario.*

El módulo $|\mathbf{A}-\mathbf{B}|$ da la distancia entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

El módulo de un vector es una generalización del valor absoluto de un número y sus propiedades son análogas.

Dados dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, y un número real $c$, se verifica:

1. $|\mathbf{A}| \geq 0$
2. $|\mathbf{A}| = 0$ si $\mathbf{A} = 0$.
3. $|c\mathbf{A}| = |c|\,|\mathbf{A}|$ (donde $|c|$ es el valor absoluto de $c$).
4. $|\mathbf{A}+\mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$ (desigualdad triangular).

## 1.7 PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

y

$$\mathbf{B} = (b_1, b_2, ..., b_n)$$

simbolizado por $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, es el número definido por

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$$

**Example 7** *Si* $\mathbf{A} = (1,2,3)$ *y* $\mathbf{B} = (4,-1,3)$ *entonces*

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 1\cdot 4 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 3 = 11$$

El producto escalar tiene las siguientes propiedades, que pueden verificarse fácilmente teniendo en cuenta la definición:

1. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$
2. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})$
3. $(c\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = c\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot(c\mathbf{B})$
4. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$

El producto escalar es muy útil en el cálculo del ángulo determinado por dos vectores.

## 1.8 ANGULO ENTRE DOS VECTORES

Dados dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, aplicando el teorema de los cosenos a sus representaciones gráficas (ver Ejercicio 12), se demuestra que el ángulo $\theta$ entre ambos vectores está dado por

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|}$$

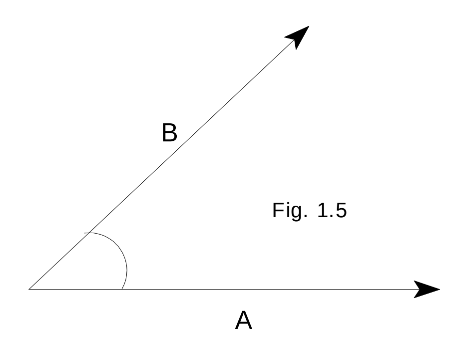


Fig. 1.5

## 1.9 PERPENDICULARIDAD ENTRE VECTORES

Cuando el ángulo entre dos vectores es $\frac{\pi}{2}$ se dice que los vectores son perpendiculares (u ortogonales). De la fórmula que da el ángulo entre dos vectores, con $\theta = \frac{\pi}{2}$, se ve que dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$.

**Example 8** *a) Dados los vectores* $\mathbf{A} = (3, -6, 9)$ *y* $\mathbf{B} = (1, -3, 4)$, *el ángulo* $\theta$ *entre los dos vectores se obtiene de*

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|} = \frac{3 + 18 + 36}{3\sqrt{14}\sqrt{26}} = \frac{57}{6\sqrt{91}} = 0.99587$$

*de donde* $\theta = 5°12'$ *medido en grados. b) Con* $\mathbf{A} = (2, 2)$ *y* $\mathbf{B} = (-1, 1)$ *se tiene* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 2\,(-1) + 2 \cdot 1 = 0$ *luego,* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son vectores perpendiculares.*

## 1.10 PRODUCTO VECTORIAL

El producto vectorial de dos vectores $\mathbf{A} = (a_1, a_2, c_3)$ y $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $R^3$, simbolizado por $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, es el vector.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (a_2b_3 - a_3b_2\ ,\ a_3b_1 - a_1b_3\ ,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

con la notación

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k} \\ \mathbf{B} &= b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}\end{aligned}$$

se tiene

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\hat{\imath} - (\,a_1b_3 - a_3b_1)\,\hat{\jmath} + (\,a_1b_2 - a_2b_1)\,\hat{k}$$

El vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular al vector $\mathbf{A}$ y al vector $\mathbf{B}$.

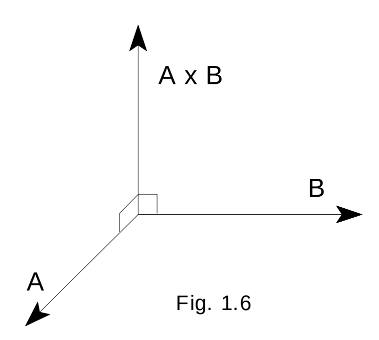


Fig. 1.6

**Example 9** *Si* $\mathbf{A} = (1, 3, 2)$ *y* $\mathbf{B} = (2, 1, 4)$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (3.4 - 1.2)\,\hat{\imath} - (1.4 - 2.2)\,\hat{\jmath} + (1.1 - 2.3)\,\hat{k}$$

*simplificando*

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 10\hat{\imath} - 5\hat{k}$$

Algunas propiedades del producto vectorial son:

1. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$ (el producto vectorial es autoconmutativo).
2. $(r\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = r\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ donde $r$ es un número real.
3. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ (propiedad distributiva).

Los vectores unitario $\hat{\imath} = (1, 0, 0)$, $\hat{\jmath} = (0, 1, 0)$ y $\hat{k} = (0, 0, 1)$ satisfacen las siguientes relaciones, que pueden verificarse por cálculo directo:

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \quad , \quad \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath} \quad , \quad \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

### 1.10.1 Significado geométrico de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

El módulo del vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es el área del paralelogramo de lados $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ (ver Ejercicio 20).

**Example 10** *Del ejemplo anterior, con* $\mathbf{A} = (1, 3, 2)$ *y* $\mathbf{B} = (2, 1, 4)$ *se tiene*

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 10\hat{\imath} - 5\hat{k}$$

*Por tanto, el área del paralelogramo de lados $A$ y $B$ es*

$$Area = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

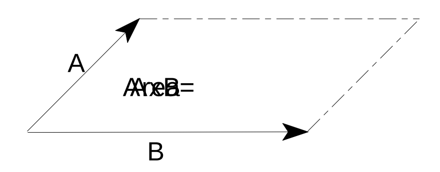



Fig. 1.7

## 1.11 EJERCICIOS RESUELTOS

**VECTORES**

Las operaciones básicas con los vectores son esencialmente las que realizamos con los números reales, simplemente cuidando de operar componente a componente.

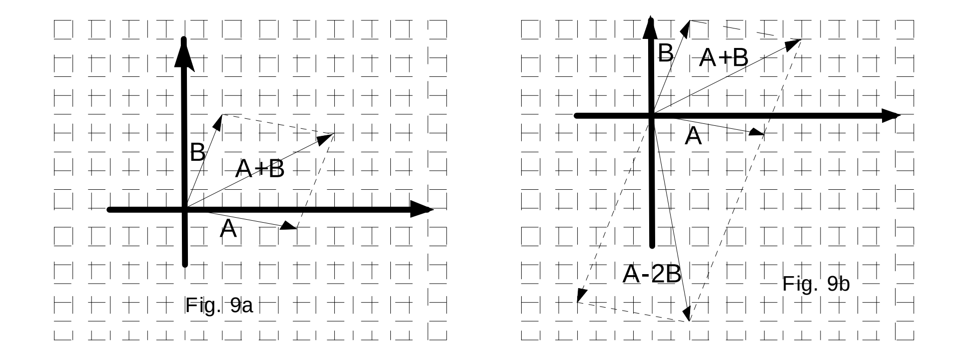
1. Si $\mathbf{A} = (4, -1)$ y $\mathbf{B} = (2, 3)$, calcular a) $\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$, b) $-\frac{1}{2}\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$.
   Solución.
   a) $\mathbf{A} - 3\mathbf{B} = (4, -1) - 3(2, 3) = (4, -1) - (6, 9) = (4 - 6, -1 - 9) = (-2, -10)$
   b) $-\frac{1}{2}\mathbf{A} + 2\mathbf{B} = -\frac{1}{2}(4, -1) + 2(2, 3) = \left(-2, \frac{1}{2}\right) + (4, 6) = \left(2, \frac{13}{2}\right)$

2. Si $\mathbf{A} = (4, -1)$ y $\mathbf{B} = (3, 2)$, calcular gráficamente a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, b) $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$.
   Solución. Antes de nada trazamos las flechas o radios vectores que representan a los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.
   a) Uniendo el origen con el vértice opuesto del paralelogramo determinado por $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, obtenemos el radio vector que representa a $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.
   b) Primero duplicamos el tamaño de $\mathbf{B}$, $2\mathbf{B}$; y luego le cambiamos el sentido, $-2\mathbf{B}$. Como en la parte a) calculamos gráficamente $\mathbf{A} + (-2\mathbf{B}) = \mathbf{A} - (2\mathbf{B})$.
   Del gráfico leemos $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (7, 1)$ del gráfio leemos $\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = (-2, -5)$.

3. Si $\mathbf{A} = (1, 4, 2)$ y $\mathbf{B} = (2, -6, 0)$, determinar un vector $\mathbf{X}$ que satisfaga la ecuación

$$\mathbf{A} - \mathbf{X} = 2(\mathbf{B} - \mathbf{X}) + \mathbf{A}$$

   Solución. Procedemos empleando las propiedades algebráicas de los vec-




tores:

$$\mathbf{A}-\mathbf{X}=2\left(\mathbf{B}-\mathbf{X}\right)+\mathbf{A} \qquad \text{(ecuación dada)}$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{X}=2\mathbf{B}-2\mathbf{X}+\mathbf{A} \qquad \text{(propiedad distributiva)}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{X}=2\mathbf{B}+\mathbf{A} \qquad \text{(sumando } 2\mathbf{X} \text{ a cada miembro)}$$

$$\mathbf{X}=2\mathbf{B} \qquad \text{(Sumando } -\mathbf{A} \text{ a cada miembro)}$$

Luego, $\mathbf{X}=2\mathbf{B}=2\left(2,-6,0\right)=\left(3,-12,0\right)$

4. Si $\mathbf{A}=(1,3,4)$ y $\mathbf{B}=(-1,0,5)$, calcular la longitud o modulo de a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, b) $\frac{1}{2}\mathbf{A}-2\mathbf{B}$.
   Solución.
   a) Como $\mathbf{A}+\mathbf{B}=(1,3,4)+(-1,0,5)=(0,3,9)$, entonces

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}|=\sqrt{0^2+3^2+9^2}=3\sqrt{10}$$

   b) Como $\frac{1}{2}\mathbf{A}-2\mathbf{B}=\frac{1}{2}\left(1,3,4\right)-2\left(-1,0,5\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}-8\right)$, entonces

$$\left|\frac{1}{2}\mathbf{A}-2\mathbf{B}\right|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-8\right)^2}=\frac{\sqrt{290}}{2}$$

5. Calcular la distancia entre los puntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dados. a) $\mathbf{A}=(1,-2)$, $\mathbf{B}=(4,3)$ , b) $\mathbf{A}=(1,2,1)$ y $\mathbf{B}=(2,-1,3)$.
   Solución. La longitud o módulo del vector que va desde el punto $\mathbf{A}$ hasta el punto $\mathbf{B}$ da la distancia $d$ entre estos dos puntos; por tanto

$$\begin{aligned} d &= |\mathbf{B}-\mathbf{A}|=|(4,3)-(1,-2)|=|(3,5)| \\ &= \sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34} \end{aligned}$$

b) Procediendo como antes

$$\begin{aligned} d &= |\mathbf{B}-\mathbf{A}| = |(2,-1,,3)-(1,2,1)| = |(1,-3,2)| \\ &= \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14} \end{aligned}$$

**PARALELISMO**

Simplemente tener en cuenta que dos vectores son paralelos si uno es múltiplo del otro.

6. Determinar el valor de $a$ para que el vector $(2,a)$ sea paralelo al vector $(-4,6)$.

   Solución. Se debe cumplir $(-4,6) = c\,(2,a)$ (condición de paralelismo). Igualando componentes:

$$\begin{aligned} -4 &= 2c \\ 6 &= ac \end{aligned}$$

   de donde

$$c = -2$$

   por tanto

$$a = 3$$

7. Mostrar que si $\mathbf{A} \neq 0$, entonces el vector $\dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ es un vector unitario, paralelo y del mismo sentido que $\mathbf{A}$.

   Solución. Como

$$\left|\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}\right| = \left|\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}\right| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\,|\mathbf{A}| = 1$$

   el vector dado es unitario.

   Por otra parte, $\dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ es múltiplo de $\mathbf{A}$ pues $\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\left(\dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\right)$; esto y el hecho de ser $|\mathbf{A}| > 0$ dicen que el vector $\dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ es paralelo y del mismo sentido que $\mathbf{A}$.

8. Si $\mathbf{A} = (1,1,-1)$, encontrar un vector unitario paralelo a $\mathbf{A}$ y a) del mismo sentido, b) de sentido opuesto.

   Solución. a) Como $|\mathbf{A}| = \sqrt{3}$, entonces por el anterior ejercicio, el vector

$$\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(1,1,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

   es unitario, paralelo a $\mathbf{A}$ y del mismo sentido.

   b) Multiplicando por -1 al vector $\dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ le cambiamos el sentido, y por tanto obtenemos un vector unitario paralelo y de sentido opuesto a $\mathbf{A}$. Es decir

$$-\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

es el vector pedido.
**PRODUCTO ESCALAR Y ORTOGONALIDAD**
Entre otras cosas, el producto escalar permite proyectar un vector sobre otro y determinar si dos vectores son o no ortogonales.

9. Calcular $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ y $(2\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}$ si a) $\mathbf{A} = (1, -4)$, $\mathbf{B} = (3, 5)$, b) $\mathbf{A} = (1, -, 1, 2)$, $\mathbf{B} = (2, 0, 3)$.
Solución.
a) Por una parte
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (1, -4) \cdot (3, 5) = 1 \cdot 3 + (-4) \cdot 5 = -17.$$
Por otro lado como
$$2\mathbf{A} - \mathbf{B} = 2\,(1, -4) - (3, 5) = (-1, -13)\,,$$
se tiene
$$\begin{aligned}(2\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} &= (-1, -13) \cdot (3, 5) = -1 \cdot 3 - 13 \cdot 5 \\ &= -68\end{aligned}$$
b) Procediendo como antes
$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (1, -1, 2) \cdot (2, 0, 3) = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 3 \\ &= 8\end{aligned}$$
por otro lado
$$\begin{aligned}(2\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} &= [2\,(1, -1, 2) - (2, 0, 3)] \cdot (2, 0, 3) \\ &= (0, -2, 1) \cdot (2, 0, 3) = 3\end{aligned}$$

10. Encontrar todos los vectores del plano, ortogonales a $\mathbf{A} = (4, -2)$.
Solución. Si $\mathbf{B} = (a, b)$ es ortogonal al vector $\mathbf{A} = (4, -2)$, entonces $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, entonces $4a - 2b = 0$ ordenando $b = 2a$. Por tanto $\mathbf{B} = (a, 2a) = a\,(1, 2)$ donde $a$ es un número real. Lo que quiere decir que los vectore ortogonales a $\mathbf{A}$ son múltiplos (paralelos) del vector $(1, 2)$.

11. Mostrar que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$
Solución. Consideremos, en general, un vector
$$\mathbf{A} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\,,$$
entonces por un lado
$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} &= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\end{aligned}$$

y por otro

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

$$|\mathbf{A}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

por tanto

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = |\mathbf{A}|^2$$

12. Mostrar que si $\theta$ es el angulo entre los vectores **A** y **B** (de $R^2$ o $R^3$), entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|}$$

Solución. Los vectores **A**, **B** y $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ forman un triángulo tal como el del diagrama adjunto. Entonces, por el teorema de los cosenos

$$|\mathbf{A} - \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - 2\,|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - 2\,|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta (por ser \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2).$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - 2\,|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta$$

de donde

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|}$$

13. Mostrar que la componente de un vector **A** en la direccion de otro vector **B** esta dado por

$$Comp_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$$

Solución. Para mayor claridad, sea $d$ la componente de **A** en la dirección

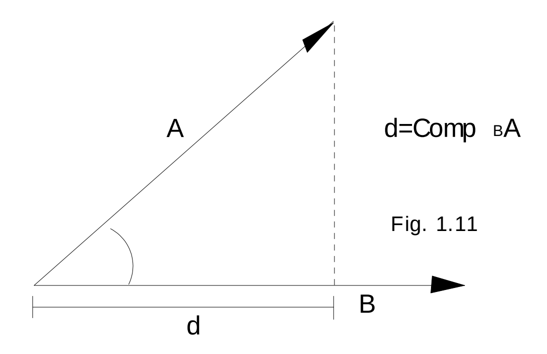


Fig. 1.11

de **B**.
Del diagrama tenemos

$$\cos\theta = \frac{d}{|\mathbf{A}|} \Longrightarrow d = |\mathbf{A}| \cos\theta$$

como

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|} \Longrightarrow d = |\mathbf{A}|\,\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|}$$

de donde

$$d = Com_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$$

**Nota 1**. Hay que remarcar que para encontrar la componente de **A** en la direccion de **B** debemos multiplicar (producto escalar) el vector **A** por el vector unitario $\dfrac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$.
**Nota 2**. El signo de la componente de **A** en la direccion de **B** es positiva si el angulo entre **A** y **B** es menor que 90°, si el angulo es mayor que 90° dicha componente sera negativa.
**Nota 3**. Si nos interesa el vector proyeccion de **A** sobre **B**, entonces simplemente hay que ampliar el vector unitario $\dfrac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$ en $Comp_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$ veces. Es decir, la proyeccion de **A** sobre **B** es

$$Proy_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = (Comp_{\mathbf{B}}\mathbf{A})\,\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \left(\mathbf{A}\cdot\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}\right)\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$$

de donde

$$Proy_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}}\right)\mathbf{B}$$

14. Calcular la componente de $\mathbf{A} = (1, 3, -1)$ en la direccion de $\mathbf{B} = (5, 2, 14)$.
    Solución. Primeramente calculamos el vector $\dfrac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$. Como

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{25 + 4 + 196} = 15$$

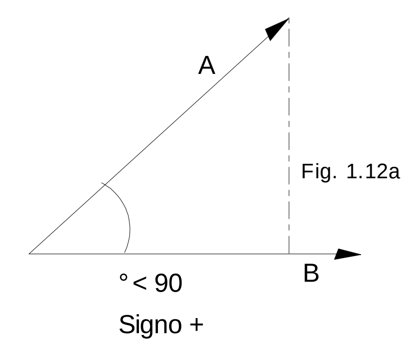



Fig. 1.12a

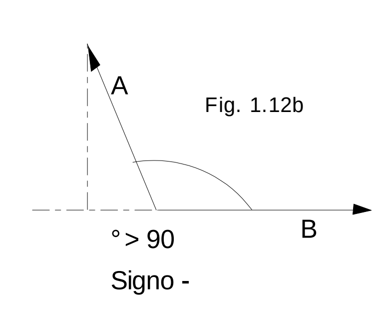



Fig. 1.12b

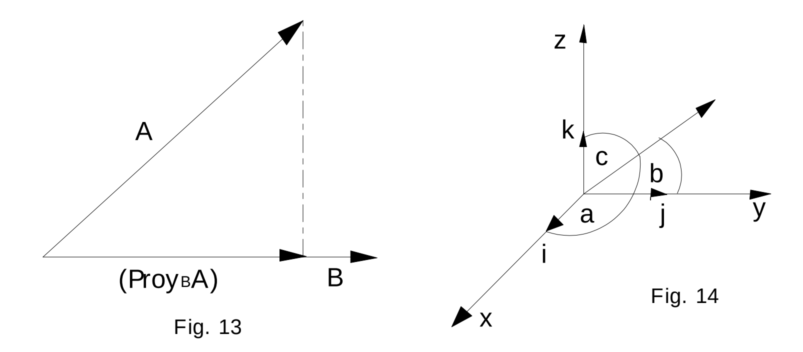



Fig. 13

Fig. 14

entonces
$$\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{1}{15}(5,2,14)$$
y por tanto
$$\begin{aligned} Comp_{\mathbf{B}}\mathbf{A} &= \mathbf{A}\cdot\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = (1,3,-1)\cdot\frac{1}{15}(5,2,14) \\ &= -\frac{1}{15} \end{aligned}$$

15. Dados $\mathbf{A} = (1,1,4)$ y $\mathbf{B} = (3,0,4)$ calcular a) la componente de $\mathbf{A}$ en la direccion de $\mathbf{B}$, $Comp_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$, b) la componente de $\mathbf{B}$ en la direccion de $\mathbf{A}$, $Comp_{\mathbf{B}}\mathbf{B}$.

    Solución. a) Como $Com_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\dfrac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$, calculamos
$$|\mathbf{B}| = \sqrt{9+0+16} = 5$$
    entonces
$$Comp_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = (1,1,4)\cdot\frac{1}{5}(3,0,4) = \frac{19}{5}$$
    b) Para el cálculo de la componente de $\mathbf{B}$ en la dirección de $\mathbf{A}$, tenemos
$$|\mathbf{A}| = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2},$$
$$Comp_{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = (3,0,4)\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}(1,1,4) = \frac{19}{3\sqrt{2}}$$

16. Los cosenos de los angulos $a, b, c$ que forma el vector $\mathbf{A}$ con los vectores unitarios $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ respectivamente, se llaman cosenos directores de $\mathbf{A}$. Hallar los cosenos directores de $\mathbf{A} = (6,3,-2)$.
    Solución. Teniendo en cuenta la fórmula que da el ángulo entre dos vectores obtenemos
$$\cos a = \frac{\mathbf{A}\cdot\hat{\imath}}{|\mathbf{A}|\,|\hat{\imath}|} = \frac{(6,3,-2)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{49}\sqrt{1}} = \frac{6}{7}$$
$$\cos b = \frac{\mathbf{A}\cdot\hat{\jmath}}{|\mathbf{A}|\,|\hat{\jmath}|} = \frac{(6,3,-2)\cdot(0,1,0)}{\sqrt{49}\sqrt{1}} = \frac{3}{7}$$
$$\cos c = \frac{\mathbf{A}\cdot\hat{k}}{|\mathbf{A}|\,\left|\hat{k}\right|} = \frac{(6,3,-2)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{49}\sqrt{1}} = \frac{-2}{7}$$
    Notemos que $\dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = (\cos a, \cos b, \cos c)$. Esto dice que los cosenos directores de $\mathbf{A}$ son las componentes del vector unitario $\dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$.

**PRODUCTO VECTORIAL**

Este producto permite encontrar un vector ortogonal a dos vectores dados. Tambien se emplea para clacular areas de triangulos, de paralelogramos y volumenes de paralelepipedos, ademas de tener otras aplicaciones.

17. Con $\mathbf{A} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{B} = (-3, 4, 1)$ calcular a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, b) $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.
Solución. a)

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (0-8)\,\hat{\imath} - (1+6)\,\hat{\jmath} + (4, 0)\,\hat{k} \\ &= -8\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + 4\hat{k} = (-8, -7, 4)\end{aligned}$$

b) Procediendo como antes

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (8-0)\,\hat{\imath} - (-6-1)\,\hat{\jmath} + (0-4)\,\hat{k} \\ &= (8, 7, -4)\end{aligned}$$

El mismo resultado obtenemos a partir de a) recordando que $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

18. Mostrar que el vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular a) el vector $\mathbf{A}$, b) al vector $\mathbf{B}$.
Solución. Vamos a mostrar que el producto escalar de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ tanto como $\mathbf{A}$ como con $\mathbf{B}$ es cero. Con $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$ tenemos

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

a) Como

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (a_1, a_2, a_3) \\ &= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_3a_2b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 \\ &= 0 \text{ (simplificando).}\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$.

19. Mostrar que $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \sin\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$.
Solucion. Cuando se tiene módulo conviene trabajar con su cuadrado y en terminos del producto escalar. Con $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$ tenemos: Por una parte

$$\begin{aligned}|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1 - a_1b_3 \\ &\quad -2a_2a_3b_2b_3\end{aligned}$$

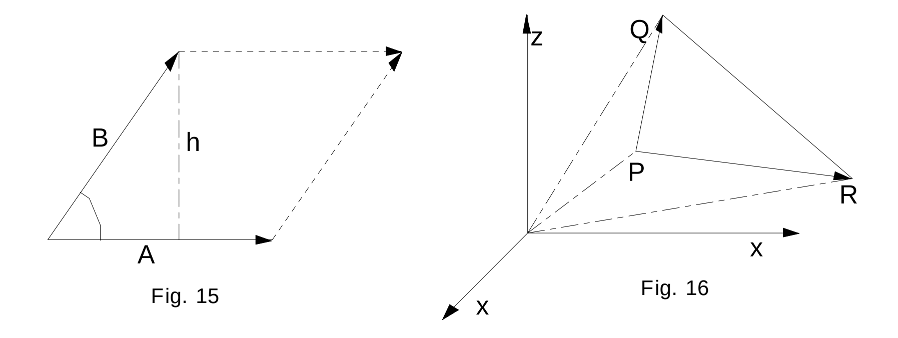


Fig. 15

Fig. 16

Por otra parte

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 \sin^2\theta &= |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 \left(1-\cos^2\theta\right) \\ &= |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 \cos^2\theta \\ &= |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 \end{aligned}$$

desarrollando y simplificando tenemos

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 &= \left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\ &= a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2 \\ &\quad -2a_1a_3b_1b_3-2a_2a_3b_2b_3 \end{aligned}$$

Combinando (1), (2) y (3) tenemos finalmente,

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2 &= |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 \sin^2\theta \\ &= |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\sin\theta \text{ con } 0\le\theta\le\pi \end{aligned}$$

El valor de $\theta$ esta restringido entre 0 y $\pi$ porque el segundo miembro debe ser no negativo, como el primer miembro.

20. Mostrar que $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$ da el área del paralelogramo de lados **A** y **B**.
Solucion. Es sabido que el área del paralelogramo de lados **A** y **B** es el producto de la base por la altura. En este caso:

$$\text{Area} = |\mathbf{A}|\,h.$$

Por otra parte, el diagrama se obtiene

$$\sin\theta = \frac{h}{|\mathbf{B}|} \Longrightarrow h = |\mathbf{B}|\sin\theta$$

reemplazando,

$$\text{Area} = |\mathbf{A}|\,h = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\sin\theta = |\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$$

21. Calcular el área del paralelogramo de lados a) $\mathbf{A} = (1, 4, -1)$ y $\mathbf{B} = (1, 0, 3)$, b) $\mathbf{A} = (2, 5)$ y $\mathbf{B} = (5, 1)$.
Solución. a) Como

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (12, -4, -4)$$

entonces:

$$\text{Area} = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |(12, -4, -4)| = \sqrt{176} = 4\sqrt{11}$$

b) Los vectores $(2, 5)$ y $(5, 1)$ están en el plano, pero los podemos considerar como vectores en el espacio escribiendo $(2, 5) = (2, 5, 0)$ , $(5, 1) = (5, 1, 0)$. Como

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -23)$$

entonces

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = 23$$

Por tanto el área del paralelogramo es igual a $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = 23$.

22. Calcular el área del triangulo de vertices $\mathbf{P} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{Q} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{R} = (1, 3, 5)$.
Solución. Notemos que el área del triángulo dado es igual a la mitad del área del paralelogramo de lado $\mathbf{Q} - \mathbf{P}$ y $\mathbf{R} - \mathbf{P}$ (ver el diagrama). Como

$$\mathbf{Q} - \mathbf{P} = (3, 2, 1) - (1, 1, 1) = (2, 1, 2)$$

$$\mathbf{R} - \mathbf{P} = (1, 3, 5) - (1, 1, -1) = (0, 2, 6)$$

y

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{P}) \times (\mathbf{R} - \mathbf{P}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (2, -12, 4)$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{área triángulo} &= \frac{1}{2} |(\mathbf{Q} - \mathbf{P}) \times (\mathbf{R} - \mathbf{P})| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4 + 144 + 16} = \sqrt{41} \end{aligned}$$

**PROBLEMAS VARIOS.**

23. Si $|\mathbf{A}| = 3$ y el ángulo entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es $45°$, cual debe ser el valor de $|\mathbf{B}|$ para que $A - \mathbf{B}$ sea perpendicular a $\mathbf{A}$.

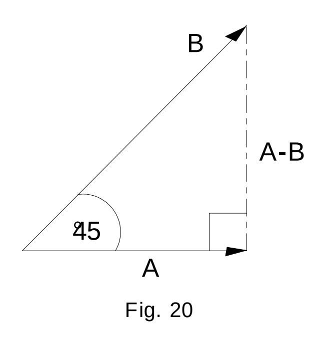


Fig. 20

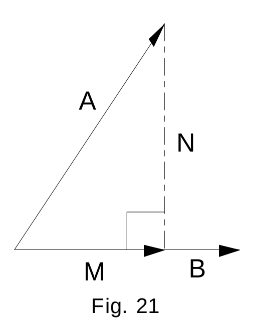


Fig. 21

Solucion. Como el vector $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ ha de ser perpendicular a $\mathbf{A}$, entonces

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot\mathbf{A} &= 0 \Rightarrow \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=0 \\ |\mathbf{A}|^2 &= \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \Rightarrow |\mathbf{A}|^2 = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos 45^\circ\end{aligned}$$

de donde

$$|\mathbf{B}| = \frac{|\mathbf{A}|}{\cos 45^\circ} = \frac{3}{1/\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

24. Sean $\mathbf{A}=(1,5)$, $\mathbf{B}=(1,1)$ y $\mathbf{C}=(-1,3)$, expresar el vector $\mathbf{A}$ como combinacion lineal de los vectores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, es decir en la forma

$$\mathbf{A} = x\mathbf{B} + y\mathbf{C}$$

Solucion. Debemos determinar los numeros $x, y$ de modo que se cumpla

$$\mathbf{A} = x\mathbf{B} + y\mathbf{C}$$

reemplazando

$$(1,5) = x\,(1,1) + y\,(-1,3) = (x-y, x+3y)$$

igualando componentes

$$\begin{aligned}1 &= x-y \\ 5 &= x+3y\end{aligned}$$

de donde, resolviendo el sistema, obtenemos

$$\begin{aligned}x &= 2 \\ y &= 1\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{B} + \mathbf{C}$$

25. Expresar el vector $\mathbf{A} = (1, 2, 1)$ como la suma de un vector $\mathbf{M}$ paralelo a $\mathbf{B} = (1, 4, -1)$ y de otro $\mathbf{N}$ perpendicular a $\mathbf{B}$.
    Solucion. Antes que nada hagamos un diagrama de la situación (Fig. ##). Como se ve, el vector $\mathbf{A}$ es la suma de $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$ es paralelo a $\mathbf{B}$ y $\mathbf{N}$ perpendicular a $\mathbf{B}$. Determinemos $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$.
    Por una parte,
    $$\mathbf{M} = xB \qquad (1)\ (\mathbf{M} \text{ paralelo a } \mathbf{B})$$
    $$\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{M} \qquad (2)\ (\text{del diagrama})$$
    por otra
    $$\mathbf{B} \cdot N = 0 \qquad (3)\ (\mathbf{B} \text{ perpendcular a } \mathbf{N})$$
    reemplazando (1) y (2) en (3) tenemos
    $$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{M}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} - x\mathbf{B}) = 0,$$
    de donde
    $$x = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}$$
    como
    $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (1, 2, 1) \cdot (1, 4, -1) = 8$$
    $$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = 1^2 + 4^2 + (-1)^2 = 18$$
    reemplazando
    $$x = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$
    entonces
    $$\mathbf{M} = x\mathbf{B} = \frac{4}{9}(1, 4, -1) = \left(\frac{4}{9}, \frac{16}{9}, \frac{-4}{9}\right)$$
    $$\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{M} = (1, 2, 1) - \left(\frac{4}{9}, \frac{16}{9}, \frac{-4}{9}\right) = \left(\frac{5}{9}, \frac{2}{9}, \frac{13}{9}\right)$$
    Notemos, finalmente, que el vector $\mathbf{A}$ se ha descompuesto en la suma de un vector $\mathbf{M}$ paralelo a $\mathbf{B}$ y de otro $\mathbf{N}$ perpendicular a $\mathbf{B}$:
    $$\mathbf{A} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \left(\frac{4}{9}, \frac{16}{9}, \frac{-4}{9}\right) + \left(\frac{5}{9}, \frac{2}{9}, \frac{13}{9}\right)$$

26. Mostrar que la recta que une el vertice de un triangulo isosceles con el punto medio de su base es perpendicular a la base.
    Solucion. Antes de nada introducimos notacion vectorial a un triangulo isosceles tal como el de la figura.
    Es suficiente mostrar que el vector $\mathbf{M} = \mathbf{B} - \frac{1}{2}\mathbf{A}$ (que une el punto medio

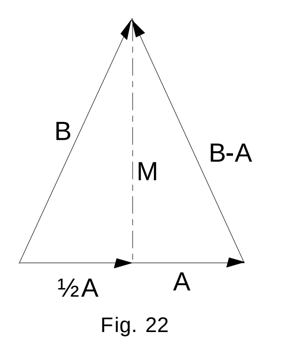


Fig. 22

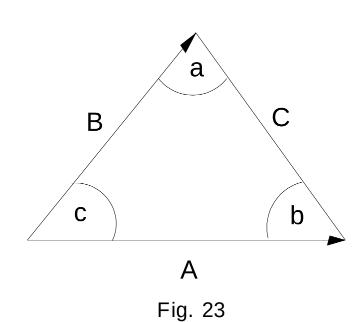


Fig. 23

de la base con el vertice opuesto) es perpendicular al vector **A**.
Por una parte

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{M}=\mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{B}-\frac{1}{2}\mathbf{A}\right)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}-\frac{1}{2}\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\qquad(1)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}|\mathbf{B}| &= |\mathbf{B}-\mathbf{A}|\ \text{(por ser triángulo isósceles)}\\ |\mathbf{B}|^2 &= |\mathbf{B}-\mathbf{A}|^2\end{aligned}$$

es decir

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}=(\mathbf{B}-\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}-\mathbf{A})=\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}-2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$$

y simplificando

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\qquad(2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{M}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}-\frac{1}{2}2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$$

lo que quiere decir que los vectores **A** y **M** son perpendiculares.

27. Mostrar que $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$ si y solo si **A** y **B** son paralelos.
Solucion. Primeramente mostraremos que si $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$ entonces **A** y **B** son paralelos.
Supongamos que $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$. En caso de que $\mathbf{A}=0$ o $\mathbf{B}=0$, entonces obviamente **A** y **B** son paralelos. En caso de que $\mathbf{A}\neq 0$ y $\mathbf{B}\neq 0$, entonces como

$$0=\mathbf{A}\times\mathbf{B}\Rightarrow 0=|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\sin\theta\ \ \text{con}\ \ 0\leq\theta\leq\pi$$

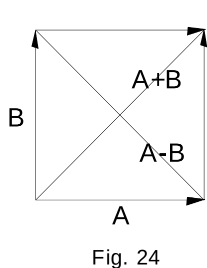


Fig. 24

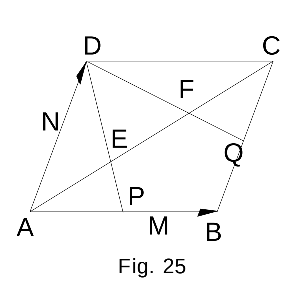


Fig. 25

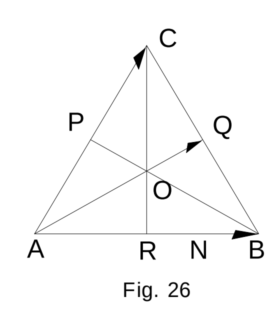


Fig. 26

y por ser

$$\mathbf{A} \neq 0 \text{ y } \mathbf{B} \neq 0, \ \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \text{ ó } \theta = \pi$$

Que el ángulo $\theta$ entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sea 0 ó $\pi$ significa precisamente que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son parlelos.
Para acabar mostraremos que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son paralelos entonces $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$.
Supongamos que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son paralelos. Entonces $\mathbf{B} = c\mathbf{A}$ y

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (c\mathbf{A}) = c\,(\mathbf{A} \times \mathbf{A}) = 0$$

por propiedad de producto vector.

28. Mostrar que las diagonales de un cuadrado son perpendiculares.
Solución. Consideremos un cuadrado cuyos lados son los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ (ver figura ##). Entonces las diagonales del cuadrado son los vectores $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.
Como

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}, \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \\ &= |\mathbf{A}|^2 - |\mathbf{B}|^2 = 0\end{aligned}$$

(por ser: lado del cuadrado $= |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$).
Por tanto, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ son perpendiculares.

29. Dado el paralelogramo de vértices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ con $P$ y $Q$ puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Mostrar que $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ trisectan la diagonal $\overline{BD}$ en los puntos $E$ y $F$.
Solución. Previamente realizamos un diagrama (figura), donde para mayor claridad se designa por $\mathbf{M}$ al vector $\overline{AB}$ y por $N$ al vector $\overline{BC}$.
Por una parte: $\overline{AE} = x\overline{AC}$ (por ser $\overline{AE}$ y $\overline{AC}$ paralelos)

$$\overline{AE} = x\,(\mathbf{M} + \mathbf{N}) \quad (\text{pues } \overline{AC} = \mathbf{M} + \mathbf{N}) \qquad (1)$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\overline{AE} &= \overline{AP} + \overline{PE} \text{ (suma de vectores)} \\
\overline{AE} &= \overline{AP} + y\overline{PD} \text{ (por ser } \overline{PE} \text{ paralelo a } \overline{PD}\text{)} \\
\overline{AE} &= \frac{1}{2}\mathbf{M} + y\left(\mathbf{N} - \frac{1}{2}\mathbf{M}\right) \quad (2)
\end{aligned}$$

por ser

$$\overline{AP} = \frac{1}{2}\mathbf{M} \text{ y por ser } \overline{PD} = \mathbf{N} - \frac{1}{2}\mathbf{M}$$

Igualando (1) y (2) tenemos

$$x(\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \frac{1}{2}\mathbf{M} + y\left(\mathbf{N} - \frac{1}{2}\mathbf{M}\right) \Rightarrow x\mathbf{M} + x\mathbf{N} = \frac{1}{2}\mathbf{M} + y\mathbf{N} - \frac{y}{2}\mathbf{M}$$

de donde

$$\left(x - \frac{1}{2} + \frac{y}{2}\right)\mathbf{M} = (y - x)\,\mathbf{N}$$

como $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ son no paralelos

$$\begin{aligned}
x - \frac{1}{2} + \frac{y}{2} &= 0 \\
y - x &= 0
\end{aligned}$$

y resolviendo el sistema obtenemos

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{3} \\
y &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Por tanto $\overline{AE} = x\overline{AC} = \frac{1}{3}\overline{AC}$, dice que $\overline{AE}$ es la tercera parte de $\overline{AC}$. Similarmente se muestra que $\overline{FC}$ es la tercera parte de $\overline{AC}$. Lo que finalmente dice que $\overline{DP}$ y $\overline{DQ}$ trisectan la diagonal $\overline{AC}$.

30. Mostrar que las medidas de un triangulo se cortan en un punto a un tercio de cada mediana.
Solución. Siguiendo el diagrama, trazamos las medianas de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.
Por un lado

$$\begin{aligned}
\overline{AO} &= x\overline{AQ} \\
\overline{AO} &= x\left(\mathbf{M} + \overline{CQ}\right)
\end{aligned}$$

pero

$$\overline{CQ} = \frac{1}{2}(\mathbf{N} - \mathbf{M})$$

entonces

$$\overline{AO} = x\left(\mathbf{M} + \frac{1}{2}(\mathbf{N} - \mathbf{M})\right) = \frac{x}{2}(\mathbf{M} + \mathbf{N}) \quad (1)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \overline{AO} &= \overline{AP} + \overline{PO} \\ \overline{AO} &= \frac{1}{2}\mathbf{M} + y\left(\overline{PB}\right) \end{aligned}$$

pues $\overline{PO}$ paralelo a $\overline{PB}$.

$$\overline{AO} = \frac{1}{2}\mathbf{M} + y\left(\mathbf{N} - \frac{1}{2}\mathbf{M}\right) \quad (2)$$

pues

$$\overline{PB} = \mathbf{N} - \frac{1}{2}\mathbf{M}$$

Igualando (1) y (2)

$$\begin{aligned} \frac{x}{2}(\mathbf{M} + \mathbf{N}) &= \frac{1}{2}\mathbf{M} + y\left(\mathbf{N} - \frac{1}{2}\mathbf{M}\right) \\ \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{y}{2}\right)\mathbf{M} &= \left(y - \frac{x}{2}\right)\mathbf{N} \end{aligned}$$

como $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ son no paralelos, entonces

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{y}{2} &= 0 \\ y - \frac{x}{2} &= 0 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{3} \\ y &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Entonces $\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AQ}$, $\overline{PO} = \frac{1}{3}\overline{PB}$.
Lo que dice que $\overline{PO}$ es la tercera parte de la mediana $\overline{PB}$; y también que $\overline{OQ}$ es la tercera parte de la mediana $\overline{AQ}$.
Hasta ahora tenemos que: Dos medianas de un triangulo se cortan en un punto (obvio) a un tercio de cada mediana (ya demostrado). De lo que se sigue que la tercera mediana debe pasar por el mismo punto de interseccion de las otras dos medianas ubicado a un tercrio de dicha mediana. Por tanto, las tres medianas del triangulo se cortan a un tercio de cada median.

## 1.12 EJERCICIOS PROPUESTOS

**VECTORES**

Sean $\mathbf{A} = (1, -2)$, $\mathbf{B} = (-1, 3)$ y $\mathbf{C} = (0, 4)$; calcular y realizar la representación gráfica :

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

2. $\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C}$.

3. $-3\mathbf{B}$.

4. $4\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$.

5. $\mathbf{A} + 2\mathbf{B} - 3\mathbf{C}$.

6. $4(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - 5\mathbf{C}$.

7. $\dfrac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \dfrac{1}{4}\mathbf{C}$.

8. Si $\mathbf{A} = (3, 0, 4)$ y $\mathbf{B} = (2, -1, -3)$, calcular la longitud o módulo de a) $\mathbf{A}$, b) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, c) $3\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{B}$ y d) $\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} + \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$.

9. Calcular la distancia entre los siguientes pares de puntos a) $(1, 1)$ y $(2, -2)$ b) $(3, 8)$ y $(8, 3)$ , c) $(1, -1, 8)$ y $(1, 2, 3)$.
   **PARALELISMO**

10. Indicar cuáles de los siguientes pares de vectores son paralelos y en tal caso, si tienen el mismo sentido. a) $(1, 1)$ y $(2, 2)$; b) $(2, 4)$ y $(4, 2)$; c) $(5, 7, 3)$ y $(-15, -21, -9)$.

11. Si $\mathbf{A} = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{B} = (3, 1, 2)$, hallar un vector unitario $\mathbf{C}$ paralelo al vector a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$; b) $2\mathbf{A} - \mathbf{B}$; c) $-\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.
    **PRODUCTO ESCALAR Y ORTOGONALIDAD**

12. Sean $\mathbf{U} = (3, 0, 5)$, $\mathbf{V} = (2, -1, -3)$, $\mathbf{P}_0 = (1, -2, 1)$, $\mathbf{P}_1 = (2, 3, -1)$, calcular: a) $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$; b) $\mathbf{U} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$; c) $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$; d) $(\mathbf{U} + \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1)$; e) $(\mathbf{U} + \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{V})$; f) $|\mathbf{U} - \mathbf{V}|^2$.

13. Determinar todos los pares ortogonales entre los vectores $\mathbf{A} = (4, 1, -3)$, $\mathbf{B} = (1, 2, 2)$, $\mathbf{C} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{D} = (2, 1, 2)$ y $\mathbf{E} = (2, -2, -1)$.

14. Hallar todos los vectores de $R^2$ de la misma longitud de $\mathbf{A}$ y que son ortogonales a $\mathbf{A}$, siendo: a) $\mathbf{A} = (1, 2)$; b) $\mathbf{A} = (2, -1)$; c) $\mathbf{A} = (-2, 8)$; d) $\mathbf{A} = (3, 5)$.

15. Encontrar un vector $\mathbf{X}$, distinto de cero, que sea ortogonal a $(1, 5, -1)$. ¿Es $\mathbf{X}$ único?

16. Calcular la componente de **A** en la dirección de **B**, siendo: a) $\mathbf{A} = (3, 8)$, $\mathbf{B} = (2, 0)$; b) $\mathbf{A} = (5, -8)$, $\mathbf{B} = (1, 1)$; c) $\mathbf{A} = (1, 2, -3)$, $\mathbf{B} = (1, 0, 1)$; d) $\mathbf{A} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{B} = (1, 2, -3)$.

17. Mostrar que el ángulo que forman $\mathbf{A} = (1, 2, 1)$ y $\mathbf{B} = (2, 1, -1)$ es el doble del que forman $\mathbf{C} = (1, 4, 1)$ y $\mathbf{D} = (2, 5, 5)$.

18. Determinar el ángulo interior más pequeño del triángulo cuyos vértices son los puntos $(2, -1, 1)$, $(1, -3, -5)$ y $(3, -4, -4)$.

19. Hallar dos vectores no paralelos, ortogonales a $(1, 2, -2)$ y módulo igual a 9.

20. Hallar dos vectores de módulo 1 , perpendiculares entre sí y perpendiculares, cada uno, al vector $(3, 0, 4)$.

**PRODUCTO VECTORIAL**

21. Sean $\mathbf{A} = (1, 2, -3)$, $\mathbf{B} = (1, -1, 0)$ y $\mathbf{C} = (-1, -2, 1)$; calcular: a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$; b) $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$, c) $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$; d) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ ;e) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B})$

22. Tres vértices de un paralelogramo son los puntos $\mathbf{A} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{B} = (-1, 1, 1)$ y $\mathbf{C} = (2, -1, 2)$; hallar todos los puntos que pueden ser el cuarto vértice del paralelogramo.

23. Calcular el área del paralelogramo de lados a) $(5, 3)$ y $(3, 7)$; b) $(a, 0, 0)$ y $(0, b, c)$.

24. Calcular el área del triángulo de vértices: a) $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(3, 8)$; b) $(-2, 1, 3)$, $(3, 0, 6)$ y $(4, 5, -1)$ ; c) $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$.

**PROBLEMAS VARIOS**

25. Si las diagnonales de un paralelogramo son los vértices $(-1, 1)$ y $(5, 1)$, hallar los lados del paralelogramo.

26. Si las diagonales de un paralelogramo son los vértices **A** y **B**, expresar los lados del paralelogramo en términos de **A** y **B**.

27. Si $\mathbf{A} = (2, -1, 1)$ y $\mathbf{B} = (3, -4, -4)$, hallar un punto **C** tal que **A**, **B** y **C** sean los vértices de un triángulo rectángulo.

28. Encontrar el ángulo que forman las diagonales de un cubo.

29. Mostrar que si los vértices **A** y **B** en el plano no son paralelos, entonces la igualdad

$$x\mathbf{A} + y\mathbf{B} = 0$$

implica $x = y = 0$.

30. Mostrar que si los vectores **A** y **B** en el plano no son paralelos, entonces la igualdad

$$x_1\mathbf{A} + y_1\mathbf{B} = x_2\mathbf{A} + y_2\mathbf{B}$$

implica $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

31. Sean $A$, $B$, $C$ y $D$ los vértices de un cuadrilátero y $P$, $Q$, $R$ y $S$ los puntos medios de cada lado respectivamente, mostrar que: a) $PQRS$ es un paralelogramo; b) el perímetro de $PQRS$ es igual a la suma de las longitudes de las diagonales de $ABCD$.

32. Mostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisectan.

33. Mostrar que las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre si.

34. Mostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre si.

35. Mostrar que el triángulo cuyos vértices están en los extremos de un diámetro de una circunferencia y sobre la circunferencia es triángulo rectángulo.

36. Mostrar que el vector que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

37. Mostrar que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante a los tres vértices.

38. Si $ABCD$ es un paralelogramo, mostrar que $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$.

# Chapter 2

# GEOMETRIA ANALITICA SOLIDA

## 2.1 LA RECTA

La recta que pasa por el punto $P_0$ y tiene la dirección del vector $\mathbf{V}$ es el conjunto de puntos $X$ que se expresan como

$$X = P_0 + t\mathbf{V} \tag{2.1}$$

$t$ número real. El vector $\mathbf{V}$ se llama vector direccional de la recta.

Considerando $X = (x, y, z)$ y $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $\mathbf{V} = (a, b, c)$ e igualando componentes en (1) se obtiene la ecuación cartesiana de la recta:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

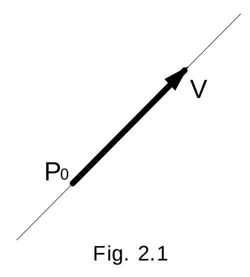



Fig. 2.1

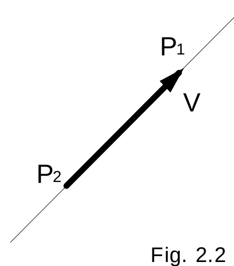



Fig. 2.2

**Example 11** *Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos* $P_0 = (1,1,1)$ *y* $P_1 = (3,-2,2)$. *Un vector direccional de la recta es*

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= P_1 - P_0 = (3,-2,2) - (1,1,1) \\ \mathbf{V} &= (2,-3,1) \end{aligned}$$

*Como la recta pasa por el punto* $P_0 = (1,1,1)$*, su ecuación es*

$$X = P_0 + t\mathbf{V} = (1,1,1) + t\,(2,-3,1)$$

*O, considerando* $X = (x,y,z)$ *e igualando componentes,*

$$\begin{array}{ll} x = 1 + 2t & \\ y = 1 - 3t & \quad (2)\ \textit{(forma cartesiana)} \\ z = 1 + t & \end{array}$$

Teniendo en cuenta que la componente de un vector en la dirección de otro se puede calcular mediante el producto escalar, se deduce que la distancia $d$ de un punto $P_1$ a la recta $X = P_0 + tV$ está dada por

$$d = \left| (P_1 - P_0) - \frac{(P_1 - P_0)\cdot\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|^2}\mathbf{V} \right|.$$

Dadas las rectas $X = P_0 + t\mathbf{V}$ y $X = P_1 + t\mathbf{U}$, el ángulo $\theta$ entre ambas es el ángulo que forman sus respectivos vectores direccionales, es decir:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}{|\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}|} \tag{2.2}$$

### 2.1.1 Distancia entre dos rectas no paralelas

$$X = P_0 + t\mathbf{U}$$

y

$$X = P_1 + t\mathbf{V}$$

es, por definición, el valor mínimo de las distancias de las distancias entre puntos de cada una de las rectas. Se puede demostrar que la distancia $d$ entre ambas rectas es

$$d = \left| (P_1 - P_0)\cdot\frac{\mathbf{U}\times\mathbf{V}}{|\mathbf{U}\times\mathbf{V}|} \right| \tag{2.3}$$

**Example 12** *Dadas las rectas no paralelas*

$$\begin{aligned} X &= P_0 + tU = (1,0,2) + t\,(2,-1,0) \\ X &= P_1 + tV = (2,1,1) + t\,(0,2,2) \end{aligned}$$

*punto* $P_2 = (1,-2,3)$*; calcular*
*a) La distancia del punto* $P_2$ *a la recta* $X = P_0 + t\mathbf{U}$.

*b) La distancia entre las dos rectas.*
*c) El ángulo entre las dos rectas.*
*Solución.*
*a) Calculando*

$$\begin{aligned} P_2 - P_0 &= (1,-1,3) - (1,0,2) = (0,-1,1) \\ (P_2 - P_0)\cdot \mathbf{U} &= (0,-1,1)\cdot(2,-1,0) = 1 \\ |\mathbf{U}| &= U \cdot U = (2,-1,0)\cdot(2,-1,0) = 5 \end{aligned}$$

*entonces*

$$\frac{(P_2 - P_0)\cdot \mathbf{U}}{|\mathbf{U}|^2}\mathbf{U} = \frac{1}{5}(2,-1,0) = \left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}, 0\right)$$

*Entonces la distancia del punto a la recta es*

$$\begin{aligned} d &= \left|(P_2 - P_0) - \frac{(P_2 - P_0)\cdot \mathbf{U}}{|\mathbf{U}|^2}\mathbf{U}\right| \\ &= \left|(0,-1,1) - \left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}, 0\right)\right| = \left|\left(\frac{-2}{5}, \frac{-4}{5}, 1\right)\right| = \frac{3}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

*b) Calculando*

$$P_1 - P_0 = (2,1,1) - (1,0,2) = (1,1,-1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\times\mathbf{V} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 4j + 4k = (-2,-4,4) \\ |\mathbf{U}\times\mathbf{V}| &= |(-2,-4,4)| = \sqrt{4+16+16} = 6 \end{aligned}$$

*luego, la distancia entre las dos rectas es*

$$\begin{aligned} d &= \left|(P_1 - P_0)\cdot\frac{\mathbf{U}\times\mathbf{V}}{|\mathbf{U}\times\mathbf{V}|}\right| = \left|(1,1,-1)\cdot\frac{1}{6}(-2,-4,4)\right| \\ d &= \left|\frac{1}{6}(-2-4-4)\right| = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

*c) Los vectores* $\mathbf{U} = (2,-1,0)$ *y* $\mathbf{V} = (0,2,2)$ *son vectores direccionales de las dos rectas dadas, por tanto el ángulo* $\theta$ *entre ambas se obtiene de*

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}{|\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}|} = \frac{(2,-1,0)\cdot(0,2,2)}{\sqrt{4+1}\sqrt{4+4}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{10}}(-2) = -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

*de donde*

$$\theta = 108^\circ 26'$$

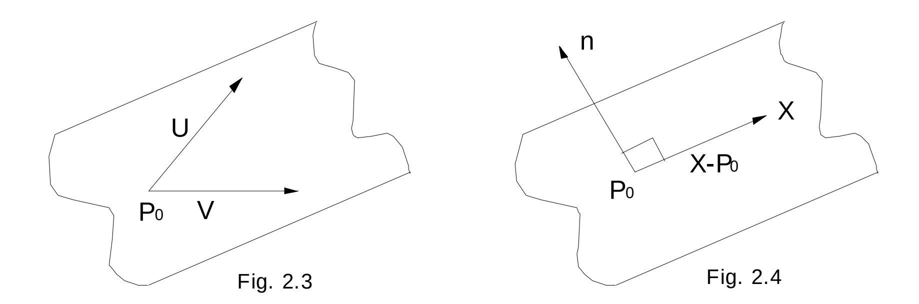


Fig. 2.3

Fig. 2.4

## 2.2 EL PLANO

El plano determinado por los vectores no paralelos $U$, $V$ y que pasa por el punto $P_0$ tiene por ecuación

$$X = P_0 + s\mathbf{U} + t\mathbf{V} \tag{2.4}$$

con $s$, $t$ números reales.

Sea $N$ un vector normal al plano, entonces si $X$ es cualquier punto del plano, el vector $X - P_0$, se encuentra sobre est

plano y debe ser perpendicular a la normal $N$, es decir, la ecuación del plano es

$$N \cdot (X - P_0) = 0 \tag{2.5}$$

De cualquiera de las dos anteriores ecuaciones (3) y (4) del plano, haciendo $X = (x, y, z)$, la ecuación del plano se reduce a la forma general

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{2.6}$$

se demuestra que el vector $(a, b, c)$ es normal al plano.

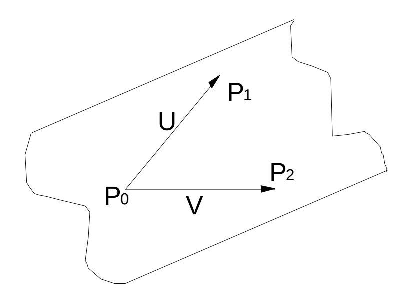
El fácil ver que dos planos son paralelos si sus normales lo son.

**Example 13** *a) Determinar la ecuación del plano que pasa por los puntos* $P_0 = (1, -1, 2)$, $P_1 = (2, 1, 1)$ *y* $P_2 = (-1, 2, 3)$.
*b) Hallar un vector normal* $N$ *al plano del inciso a).*
*c) Expresar la ecuación del plano en suf orma cartesiana* $ax + by + cz + d = 0$.
*a) Los vectores*

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= P_1 - P_0 = (2, 1, 1) - (1, -1, 2) = (1, 2, -1) \\ \mathbf{V} &= P_2 - P_0 = (-1, 2, 3) - (1, -1, 2) = (-2, 3, 1) \end{aligned}$$

*se encuentran sobre el plano. Como el plano pasa por* $P_0 = (1, -1, 2)$ *su ecuación vectorial es*

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= P_0 + s\mathbf{V} + t\mathbf{U} \\ &= (1, -1, 2) + s\,(1, 2, -1) + t\,(-2, 3, 1) \end{aligned}$$




*b) Puesto que los vectores* **U** *y* **V** *están sobre el plano, un vector normal al plano es*

$$\mathbf{N} = \mathbf{U} \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 7\hat{k} = (5, 1, 7)$$

*c) Si $X = (x, y, z)$ es un punto cualquiera del plano, el vector $X - P_0$ se encuentra sobre el plano y debe ser, por tanto, perpendicular al vector normal $N$. Es decir*

$$\begin{aligned} N \cdot (X - P_0) &= 0 \\ (5, 1, 7) \cdot ((x, y, z) - (1, -1, 2)) &= (5, 1, 7) \cdot (x - 1, y + 1, z - 2) = 0 \\ 5x + y + 7z - 18 &= 0 \end{aligned}$$

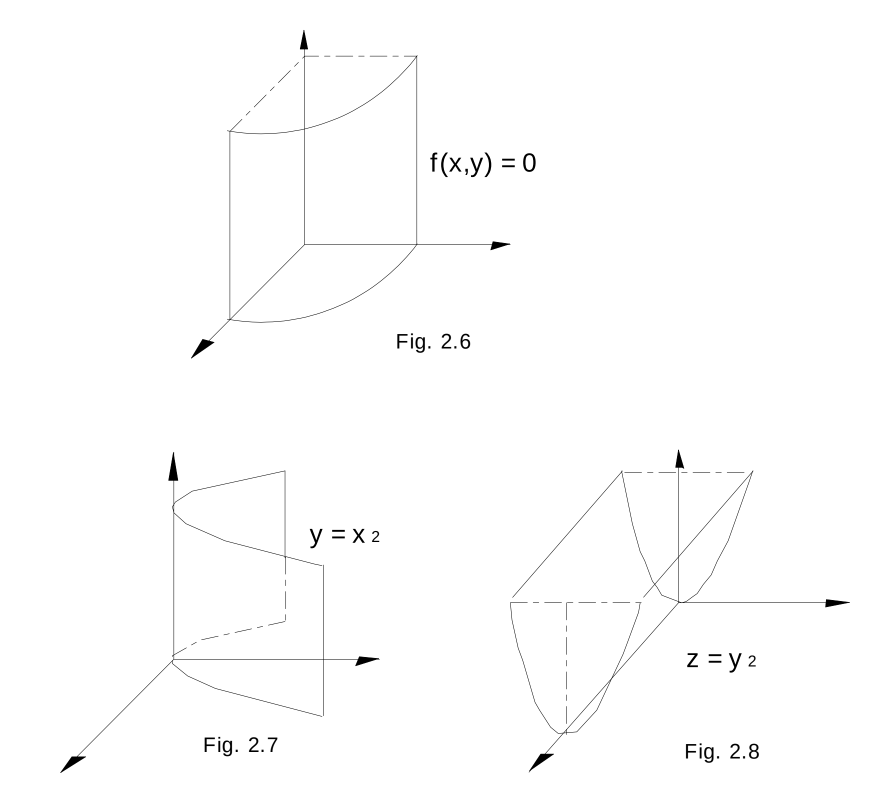
*Si $N$ es un vector normal al plano que pasa por el punto $P_0$, la distancia $d$ del punto $P$ al plano está dado por*

$$\begin{aligned} d &= \left| (P - P_0) \cdot \frac{N}{|N|} \right| = \left| ((1, 2, 3) \cdot (0, 0, 4)) \cdot \frac{(3, -2, 1)}{\sqrt{14}} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{14}} (1, 2, -1) \cdot (3, -2, 1) \right| = \left| -\frac{2}{\sqrt{14}} \right| \\ &= \sqrt{\frac{2}{7}} \end{aligned}$$

## 2.3 CILINDROS Y SUPERFICIES CUADRICAS

### 2.3.1 Cilindros

Una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$ determina una superficie en el espacio $xyz$. Su gráfica en el espacio se obtiene deslizando la curva $f(x, y) = 0$ del




plano $xy$ en forma continua y paralelamente al eje $z$ -variable que no figura en la ecuación de la superficie - (Ver figura 2.6).

Similarmente se obtienen las gráficas de superficies cilíndricas paralelas a los otros ejes.

**Example 14** *Graficar las superficies cilíndricas a)* $y = x^2$ *y b)* $z = y^2$*.*
*Solución. a) La gráfica de* $y = x^2$ *en el plano* $xy$ *es una parábola. Deslizando paralelamente al eje* $z$ *se obtiene su gráfica (figura 2.7a).*
*b) La gráfica de* $z = y^2$ *es una parábola en el plano* $yz$*. La gráfica de la superficie* $z = y^2$ *en el espacio se obtiene deslizando la parábola paralelamente al eje* $x$ *(figura 2.7b).*

### 2.3.2 Superficies cuádricas

La gráfica en el espacio de una ecuación polinomial de segundo grado se llama superficie cuádrica. Así por ejemplo, las gráficas de

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ , \ x^2 - 2xy + y^2 - z^2 = 10 \ , \ y^2 - z^2 = 4$$

son superficies cuádricas.

Algunas superficies cuádricas ya conocidas son la esfera $(x^2+y^2+z^2=R^2)$ y el cilindro $(x^2+y^2=R^2)$. Existen también otras que son particularmente importantes.

Para graficar una superficie cuádrica es conveniente seguir ordenadamente los siguientes pasos:

1. Encontrar las intersecciones de la superficie con los planos coordenados (llamadas trazas).

2. Encontrar las intersecciones de la superficie con los ejes coordenados.

3. Graficar algunas secciones planas de la superficie.

**Example 15** *Graficar la superficie cuádrica*

$$x^2+y^2-4z^2-2x=0.$$

*Procedemos siguiendo las recomendaciones generales dadas:*
*1. Trazas. Haciendo $z=0$ hallamos la intersección de la superficie con el plano $xy$:*

$$\begin{array}{rcl} x^2+y^2-4z^2-2x=0 & & x^2+y^2-2x=0 \\ & \Rightarrow & \\ z=0 & & (x-1)^2+y^2=1 \text{ (circunferencia)} \end{array}$$

*Haciendo $y=0$ hallamos la intersección de la superficie con el plano $xz$:*

$$\begin{array}{rcl} x^2+y^2-4z^2-2x=0 & & x^2-2x-4z^2=0 \\ & \Rightarrow & \\ y=0 & & (x-1)^2-4z^2=1 \text{ (hipérbola)} \end{array}$$

*Haciendo $x=0$ hallamos la traza en el plano $yz$:*

$$\begin{array}{rcl} x^2+y^2-4z^2-2x=0 & & y^2-4z^2=0 \\ & \Rightarrow & \\ x=0 & & (y-2z)(y+2z)=0 \text{ (dos rectas )} \end{array}$$

*2. Haciendo $x=0$, $y=0$ obtenemos la intersección de la superficie con el eje $z$:*

$$\begin{array}{rcl} x^2+y^2-4z^2-2x=0 & & \\ & \Rightarrow & -4z^2=0 \Rightarrow z=0 \\ x=0,\ y=0 & & \end{array}$$

*con $x=0$, $z=0$ obtenemos la intersección con el eje $y$:*

$$\begin{array}{rcl} x^2+y^2-4z^2-2x=0 & & \\ & \Rightarrow & y^2=0 \Rightarrow y=0 \\ x=0,\ z=0 & & \end{array}$$

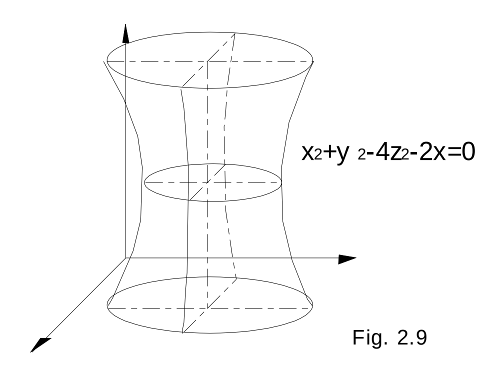


Fig. 2.9

*y haciendo* $y = 0$, $z = 0$ *tenemos la intersección con el eje* $x$

$$\begin{matrix} x^2 + y^2 - 4z^2 - 2x = 0 \\ y = 0, \ z = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^2 - 2x = 0 \\ x(x-2) = 0 \end{matrix}$$

*3. Ahora averiguemos cómo es la superficie a diversas alturas del espacio, es decir; sobre los planos de la forma* $z = k$ *(*$k$ *constante).*

$$x^2 + y^2 - 2x = 4k^2 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4k^2 + 1 \quad \textit{(circunferencia)}$$

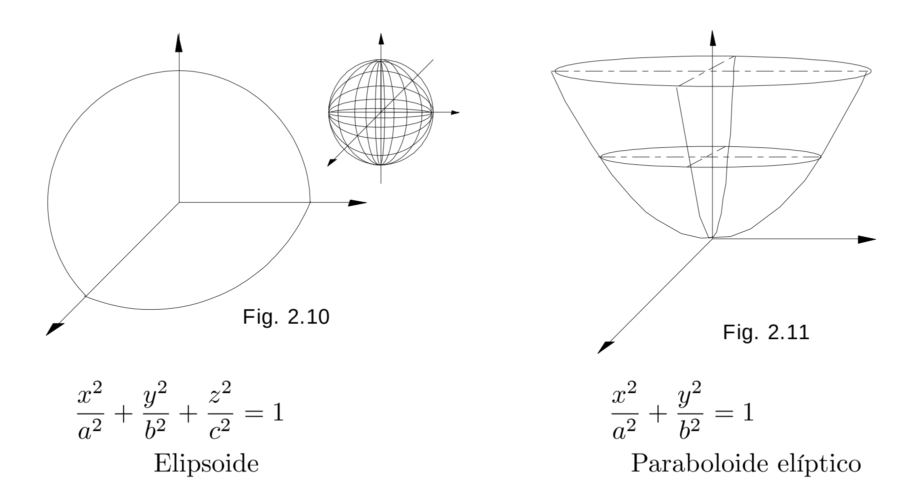
*Estos nos dice que si se corta la superficie con el plano* $z = k$ *se obtiene la circunferencia:*

$$(x-1)^2 + y^2 = 4k^2 + 1$$

*Además, observamos que a medida que el corte con el plano* $z = k$ *se efectúa a mayor altura (*$k$ *cada vez más grande), el radio de la circunferencia aumenta. Graficando cada una de las trazas, y teniendo en cuenta las intersecciones con los ejes coordenados; y considerando que las circunferencias en cada plano de corte son más grandes a mayor altura, hacia arriba o hacia abajo, se obtiene la gráfica de la figura 2.8.*

### 2.3.3 Superficies cuádricas importantes

Procediendo como en el ejemplo ## se obtienen las gráficas de superficies cuádricas importantes, gráficas que se muestran en las figuras que siguen:

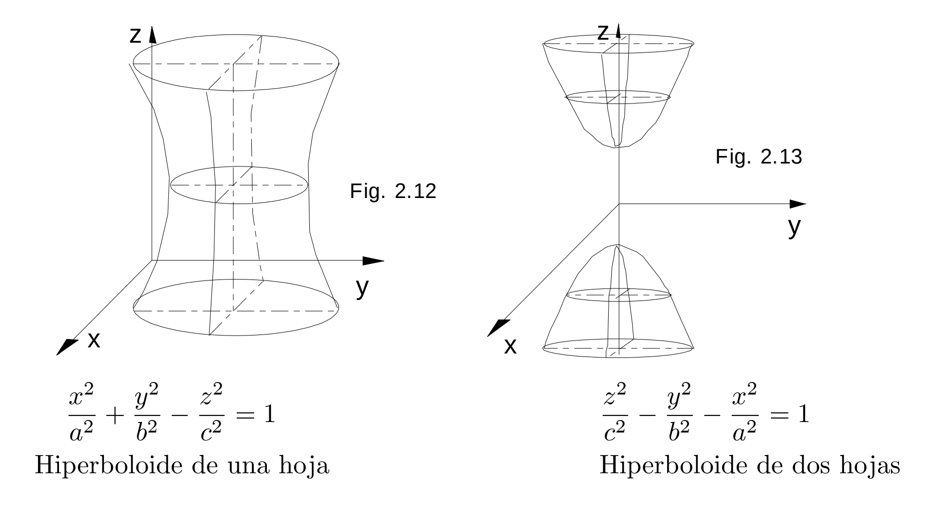



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Paraboloide elíptico

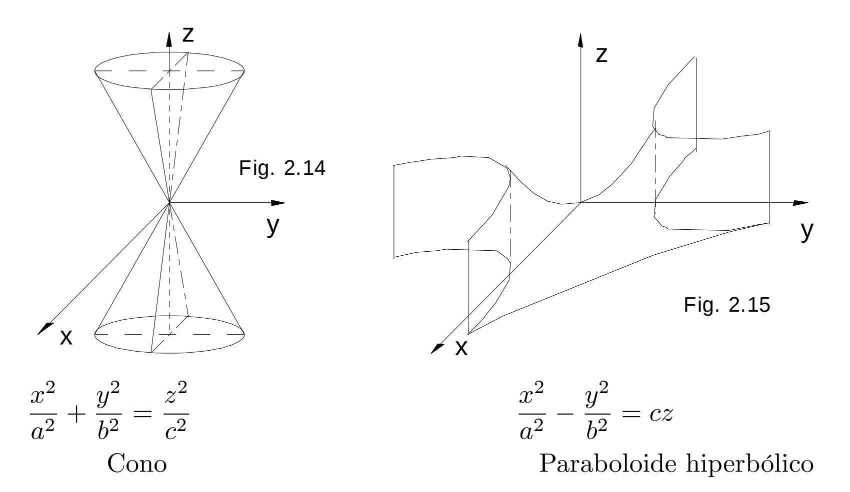



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hiperboloide de una hoja

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Hiperboloide de dos hojas




$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$
Cono

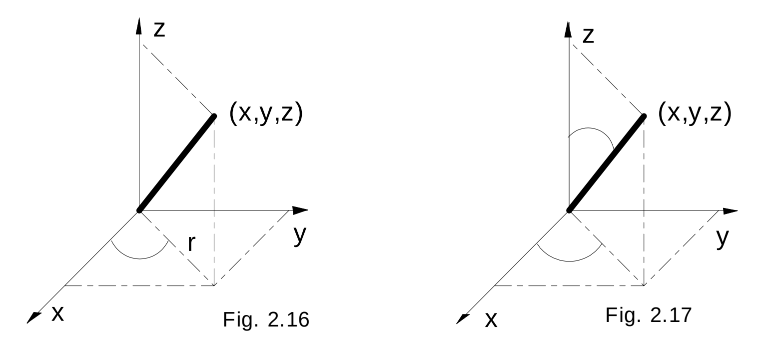
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$$
Paraboloide hiperbólico

Notemos que si intercambiamos los símbolos $x$, $y$, $z$ en cualquiera de las anteriores ecuaciones, el tipo de la superficie no cambia.

## 2.4 COORDENADAS CILINDRICAS Y ESFERICAS

Muchas superficies cuyas ecuaciones cartesianas son relativamente complicadas, se describen de manera simple en otro sistema de coordenadas adecuadamente elegido.

### 2.4.1 Coordenadas cilíndricas




El punto $(x, y, z)$ del espacio se puede determinar también mediante las coordenadas $(r, \theta, z)$ donde

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \quad , \quad 0 \le r \\ y &= r\sin\theta \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi \\ z &= z \end{aligned} \tag{2.7}$$

En el espacio $xyz$ las coordenadas cilíndricas se interpretan así:
$r$: es la longitud del radio vector proyección de $(x, y, z)$ sobre el plano $xy$.
$\theta$: es el ángulo que hay entre el eje $x$ positivo y el radio vector $r$.
$z$: cntinua siendo la altura del punto.

Las ecuaciones dadas anteriormente permiten pasar del sistema de coordenadas cartesianas al de coordenadas cilíndricas. Para el proceso inverso se tiene

$$\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{array} \tag{2.8}$$

**Example 16** *La gráfica de $x^2+y^2 = z^2$ es un cono. En coordenadas cilíndricas, este mismo cono está representado simplemente por*

$$r = z$$

### 2.4.2 Coordenadas Esféricas

El punto $(x, y, z)$ del espacio puede localizarse también por medio de las coordenadas $(\rho, \phi, \theta)$. Las ecuaciones que relacionan ambos sistemas son:

$$\begin{array}{l} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{array} \tag{2.9}$$

donde $\rho \geq 0$, $0 \leq, \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

En el espacio $xyz$ las coordenadas esféricas admiten la siguiente interpretación:
$\rho$: es la longitud del radio vector que va del origen al punto $(x, y, z)$.
$\phi$: es el ángulo medio entre el eje $z$ positivo y el radio vector.
$\theta$: como en coordenadas cilíndricas es el ángulo medio sobre el plano $xy$ entre el eje $x$ positivo y la proyección del radio vector sobre el plano $xy$.

Por cálculo directo se demuestra que $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

**Example 17** *La gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ es una esfera de radio $R$. Su ecuación en coordenadas esféricas es simplemente*

$$r = R$$

## 2.5 EJERCICIO RESUELTOS

### 2.5.1 La Recta

Dos puntos o un punto y un vector (direccional) determina completamente a una recta.

1. Hallar la ecuación vectorial y cartesiana, dela recta que pasa por el punto $P_0 = (1, -1, 2)$ con vector direccional $V = (2, 1, 1)$.

Solución. como la recta pasa por $P_0 = (1, -1, 2)$ y su vector direccional es $V = (2, 1, 1)$, su ecuación vectorial es

$$X = P_0 + tV = (1, -1, 2) + t\,(2, 1, 1)$$

Con $X = (x, y, z)$ e igualando componentes obtenemos la ecuación cartesiana de la recta

$$(x, y, z) = (1, -1, 2) + t\,(2, 1, 1)$$

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= -1 + t \\ z &= 2 + t \end{aligned}$$

2. Hallar la ecuación de la recta que para por los puntos $P_0 = (1, 2, 3)$ y $P_1 = (-2, 1-2)$.

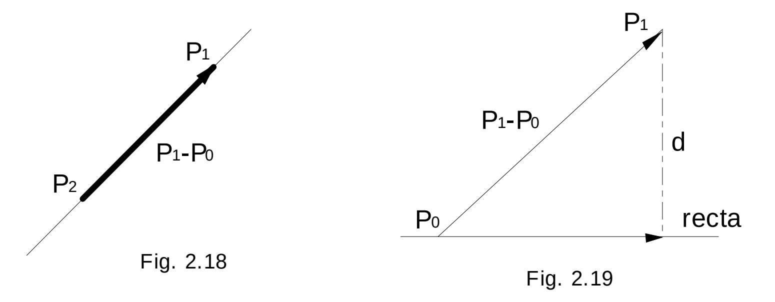



Fig. 2.18

Fig. 2.19

Solución. El vector $P_1 - P_0$, que va de $P_0$ a $P_1$, se encuentra sobre la recta y es, por tanto, un vector direccional de la recta. Calculando:

$$\begin{aligned} V &= P_1 - P_0 = (-2, 1, 2) - (1, 2, 3) \\ &= (-3, -1, -1) \end{aligned}$$

Como para por $P_0$, la ecuación de la recta pedida es

$$X = P_0 + tV = (1, 2, 3) + t\,(-3, -1, -1)$$

o también:

$$\begin{aligned} x &= 1 - 3t \\ y &= 2 - t \\ z &= 3 - t \end{aligned}$$

3. Mostrar que la distancia del punto $P_1$ a la recta $X = P_0 + tV$ está dada por

$$d = \left|(P_1 - P_0) - \frac{(P_1 - P_0) \cdot V}{|V|^2} V\right|$$

Solución. Para mayor claridad lo haremos detalladamente. Teniendo en cuenta la figura ###, el vector $P_1 - P_0$ va del punto $P_0$ a $P_1$, la proyección de este vector sobre la recta es igual a su proyección sobre el vector direccional $V$, es decir: Proyección sobre la recta $(P_1 - P_0) \cdot \frac{V}{|V|}$ multiplicando por el vector unitario $V$ se obtiene el vector proyección sobre la recta

$$(P_1 - P_0) \cdot \frac{V}{|V|} \frac{V}{|V|}.$$

Por tanto, la distancia del punto a la recta es:

$$d = \left|(P_1 - P_0) - \frac{(P_1 - P_0) \cdot V}{|V|^2} V\right|$$

4. Calcular la distancia del punto $(1, 2, 1)$ a la recta

$$X = (1, 1, 1) + t\,(2, 1, -1)\,.$$

Solución. Con $P_0 = (1, 2, 1)$, $P_1 = (1, 1, 1)$ y $V = (2, 1, -1)$ y de acuerdo al ejercicio anterior tenemos

$$\begin{aligned} P_1 - P_0 &= (1, 2, 1) - (1, 1, 1) \\ &= (0, 1, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P_1 - P_0) \cdot V &= (0, 1, 0) \cdot (2, 1, -1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ademas $|V|^2 = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 = 6$. Por tanto

$$d = \left|(P_1 - P_0) - \frac{(P_1 - P_0) \cdot V}{|V|^2} V\right| = \left|(0, 1, 0) - \frac{1}{6}\,(2, 1, -1)\right| = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

5. Hallar la distancia del punto $(-2, 1, 3)$ a la recta

$$x = t \quad ; \quad y = 1 - t \quad ; \quad z = 2 + 3t$$

Solución. Para poder aplicar la fórmula, previamente expresamos la ecuación de la recta en su forma vectorial.
Como $x = t$ ; $y = 1 - t$ ; $z = 2 + 3t$

$$X = (0, 1, 2) + t\,(1, -1, 3)$$

entonces, por $P_0 = (0,1,2)$, $V = (1,-1,3)$ y $P_1 = (-2,1,3)$, tenemos

$$P_1 - P_0 = (-2,1,3) - (0,1,2) = (-2,0,1)$$

$$(P_1 - P_0) \cdot V = (-2,0,1) \cdot (1,-1,3) = 1$$

$$|V|^2 = 1^2 + (-1)^2 + 3^2 = 11.$$

De donde

$$d = \left| (P_1 - P_0) - \frac{(P_1 - P_0) \cdot V}{|V|^2} V \right| = \left| (-2,0,1) - \frac{1}{11}(1,-1,3) \right| = \frac{1}{11}\sqrt{594}$$

6. Calcular la distancia del punto $P_0 = (1,0,2)$ a la recta que pasa por los puntos $P_1 = (1,2,1)$ y $P_2 = (2,-1,3)$.
Solución. La recta que pasa por los puntos $P_1$ y $P_2$ tiene como vector direccional a

$$P_2 - P_1 = (2,-1,3) - (1,2,1) = (1,-3,2).$$

Como, en particular, la recta pasa por $P_1$, la distancia de $P_0$ a la recta es

$$d = \left| (P_1 - P_0) - \frac{(P_1 - P_0) \cdot V}{|V|^2} V \right| = \left| (0,2,1) - \frac{(0,2,-1) \cdot (1,-3,2)}{1^2 + (-3)^2 + 2^2}(1,-3,2) \right|$$

Simplificando

$$d = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

7. Dadas las rectas $X = (2,-1,3) + t(3,-4,1)$, $X = (2,0,1) + t(5,2,0)$, calcular el ángulo entre las dos rectas.
Solución. De las ecuciones dadas, los vectores $U = (3,-4,1)$ y $V = (5,2,0)$ son vectores direccionales de la primera y segunda recta dada respectivamente. Teniendo en cuenta que el ángulo entre dos rectas es el ángulo entre sus vectores direccionales, el ángulo $\theta$ buscando obtenemos de

$$\cos\theta = \frac{U \cdot V}{|V|\,|V|} = \frac{(3,-4,1) \cdot (5,2,0)}{\sqrt{26}\sqrt{29}} = \frac{7}{\sqrt{754}}$$

$$\theta = 75^\circ 13'$$

8. Mostrar que la distancia entre las rectas no paralelas

$$X = P_0 + tU \quad ; \quad X = P_1 + tV$$

está dada por

$$d = \left| (P_1 - P_0) \cdot \frac{U \times V}{|U \times V|} \right|$$

Solución. Por una parte el vector $U \times V$ es perpendicular a $U$ y $V$.

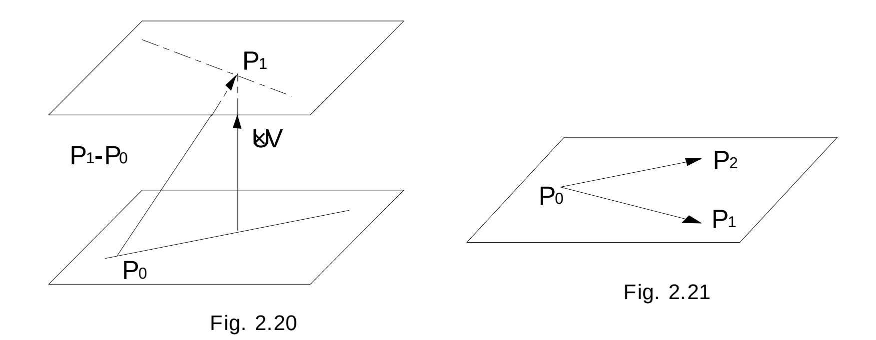



Fig. 2.20

Fig. 2.21

Por otra parte, el vector $P_1 - P_0$ va del punto $P_0$ (en una de las rectas) a $P_1$ (en la otra recta). Entonces, la distancia entre las dos rectas es la proyección del vector $P_1 - P_0$ sobre el vector $U \times V$. (Fig. ###). Es decir

$$d = \left| (P_1 - P_0) \cdot \frac{U \times V}{|U \times V|} \right|$$

donde se ha tomando el valor absoluto para evitar distancias negativas.

9. Dadas las rectas

$$\begin{aligned} x &= 3 - t \;;\; y = 2 + 2t \;;\; z = 1 - t \\ x &= t \;;\; y = 1 + t \;;\; z = 2t \end{aligned}$$

calcular a) el ángulo que forman y b) la distancia entre ellas.
Solución. Antes que nada, conviene expresar cada recta en su forma vectorial:

$$\begin{aligned} X &= (x, y, z) = (3, 2, 1) + t\,(-1, 2, -1) = P_0 + tU \\ X &= (x, y, z) = (0, 1, 0) + t\,(1, 1, 2) = P_1 + tV \end{aligned}$$

a) El ángulo que forman las rectas se obtiene de

$$\begin{aligned} \cos\theta \frac{U \cdot V}{|U|\,|V|} &= \frac{(-1, 2, -1) \cdot (1, 1, 2)}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{1+1+4}} = -\frac{1}{6} \\ \theta &= 99^\circ 35' \end{aligned}$$

b) Como $P_1 - P_0 = (0, 1, 0) - (3, 2, 1) = (-3, -1, -1)$

$$U \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5i + j - 3k = (5, 1, -3)$$

y, de acuerdo al ejercicio 8, la distancia entre las rectas es

$$d = \left|(P_1 - P_0) - \frac{U \times V}{|U \times V|}\right| = \left|(-3, -1, -1) \cdot \frac{(5, 1, -3)}{\sqrt{25 + 1 + 9}}\right| = \frac{16}{\sqrt{35}}$$

**EL PLANO**

Un plano está completamente determinado por tres puntos del plano, o un punto del plano y dos vectores no paralelos sobre el plano; o también por un punto del plano y un vector normal al plano.

10. Dados los puntos $P_0 = (-1, 2, 1)$, $P_1 = (3, 2, -1)$, $P_2 = (0, 1, 2)$. Hallar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos a) en su forma vectorial, b) en su forma casteriana.
Solución. a) Los vectores

$$\begin{aligned} P_1 - P_0 &= (3, 2, -1) - (-1, 2, 1) = (4, 0, -2) \\ P_2 - P_0 &= (0, 1, 2) - (-1, 2, 1) = (1, -1, 1) \end{aligned}$$

se encuentran sobre el plano. Por tanto, los dos vectores generan el plano pedido y su ecuación vectorial es

$$\begin{aligned} X &= P_0 + sU + tV \\ X &= (-1, 2, 1) + s\,(4, 0, -2) + t\,(1, -1, 1) \end{aligned}$$

b) La ecuación catesiana del plano se obtiene de la ecuación vectorial simplemente igualando componentes y eliminando las variables $s$ y $t$:

$$X = (x, y, z) = (-1, 2, 1) + s\,(4, 0, -2) + t\,(1, -1, 1)$$

donde

$$\begin{aligned} x &= -1 + 4s + t \\ y &= 2 \qquad - t \\ z &= 1 - 2s + t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 1 + 4s \\ y + z &= 3 - 2s \end{aligned}$$

$$x + 3y + 2z = 7$$

11. Hallar la ecuación cartesiana del plano cuya ecuación vectorial es

$$X = (1, -1, 2) + t\,(2, -1, 3)$$

Solución. Igualando componentes y eliminando las variables $s$ y $t$:

$$X = (1, -1, 2) + s\,(3, -1, 2) + t\,(2, -1, 3)$$

$$\begin{array}{l} x = 1 + 3s + 2t \\ y = -1 - s + t \\ z = 2 + 2s + 3t \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x - 2y = 3 + 5s \\ 3y - z = -5 + 5s \end{array} \Longrightarrow x - 5y + z = 8$$

12. Hallar la ecuación vectorial del plano cuya ecuación cartesiana es

$$x - y + 2y = 1$$

Solución. determinamos tres puntos del plano a partir de los cuales obtendremos dos vectores sobre el plano.
Si

$$\begin{array}{lll} x = 0 \; ; \; y = 0 \;\Rightarrow z = \frac{1}{2} & \text{entonces} & P_0 = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right) \\ x = 0 \; ; \; z = 0 \Rightarrow y = -1 & \text{entonces} & P_1 = (0, -1, 0) \\ y = 0 \; ; \; z = 0 \Rightarrow x = 1 & \text{entonces} & P_2 = (1, 0, 0) \end{array}$$

Los vectores $U = P_1 - P_0 = \left(0, -1, -\frac{1}{2}\right)$ y $V = \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)$ están sobre el plano. Teniendo en cuenta que el plano pasa por $(1, 0, 0)$, su ecuación vectorial es

$$X = (1, 0, 0) + s\left(0, -1 - \frac{1}{2}\right) + t\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

13. Mostrar que el vector $(a, b, c)$ es perpendicular al plano $ax+by+cz+d = 0$.

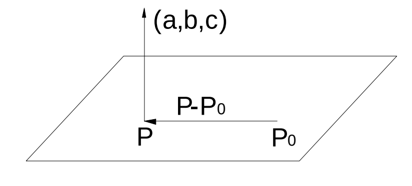



Fig. 2.22

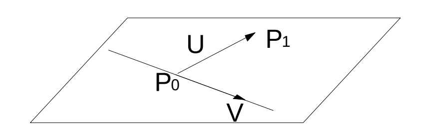



Fig. 2.23

Solución. Es suficiente mostrar que el vector $(a, b, c)$ es perpendicular a cualquier vector que esté sobre el plano.
Con $x = 0$, $y = 0$ de la ecuación del plano se tiene $z = -\frac{d}{c}$; entonces el punto $P_0 = \left(0, 0, -\frac{d}{c}\right)$ está en el plano. Si $P = (x, y, z)$ es cualquier otro punto del plano, el vector $P - P_0 = \left(x, y, z + \frac{d}{c}\right)$ se encuentra sobre el plano.
Como $(a, b, c) \cdot \left(x, y, z + \frac{d}{c}\right) = ac + by + c\left(z + \frac{d}{c}\right) = ax + by + cz + d = 0$.
Esto dice que el vector $(a, b, c)$ es perpendicular a cualquier vector que está sobre el plano y, por tanto, es perpendicular al plano.

14. Hacer pasar una recta por el punto $(1, 4, 2)$, perpendicular al plano $x + 2y + 3z = 10$.
Solución. De la ecuación del plano se sigue que el vector $(1, 2, 3)$ es perpendicular al plano (ejercicio anterior) y, por tanto, sirve como vector

direccional de la recta pedida. Como la recta debe pasar por el punto $(1, 4, 2)$, la recta pedida es

$$X = (1, 4, 2) + t\,(1, 2, 3)$$

**PROBLEMAS VARIOS**

15. Encuentre la ecuación del plano que pasa por $P_1 = (2, -1, 2)$ y contiene a la recta $X = (1, 0, 2) + t\,(3, 2, 1)$.
Solución. Recordemos que necesitamos dos vectores no paralelos para generar un plano. Como la recta

$$X = P_0 + tV = (1, 0, 2) + t\,(3, 2, 1)$$

está contenida en el plano, el vector $V = (3, 2, 1)$ está sobre el plano pedido. Por otra parte, por pasar el plano por los puntos $P_0$ y $P_1$, el vector

$$U = P_1 - P_0 = (2, -1, 2) - (1, 0, 2) = (1, -, 1, 0)$$

está sobre el plano. Por tanto $U$ y $V$ generan el plano pedido. Luego, teniendo en cuenta que debe pasar por $P_1$ la ecuación del plano pedid es

$$X = P_1 + sU + tV = (2, -1, 2) + s\,(1, -1, 0) + t\,(3, 2, 1)$$

16. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_0 = (3, 1, -2)$, $P_1 = (1, 2, 1)$ y es perpendicular al plano $x - 3y + 2z = 8$.

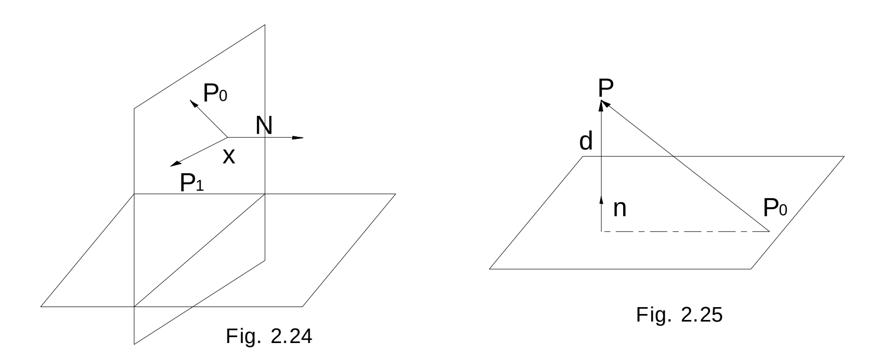


Fig. 2.24

Fig. 2.25

Solución. Por una parte, de la ecuación del plano dado se tiene que el vector $M = (1, -3, 2)$ es perpendicular a dicho plano. Por otra parte, si $X = (x, y, z)$ es cualquier punto del plano pedido, los vectores

$$\begin{aligned} U &= X - P_0 = (x - 3, y - 1, z + 2) \\ V &= X. - P_1 = (x - 1, y - 2, z - 1) \end{aligned}$$

se encuentra sobre el plano. Entonces el vector $N = U \times V$ es perpendicular al plano pedido. Como los planos deben ser perpendiculares, deben serlo también sus normales $M$ y $N$; es decir

$$M \cdot N = M \cdot (U \times V) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ x-3 & y-1 & z+2 \\ x-1 & y-2 & z-1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se obtiene:

$$11x + 7y + 5z = 25,$$

que es la ecuación del plano pedido.

17. Mostrar que la distancia del punto $P$ al plano que pasa por $P_0$ con vector normal $n$ está dado por:

$$d = \left| (P - P_0) \cdot \frac{n}{|n|} \right|$$

Solución. El vector $P - P_0$ va de $P_0$ a $P$ y la proyección de este vector sobre el vector normal $n$ da la distancia del punto $P$ al plano (figura. ###). Es decir

$$d = \left| (P - P_0) \cdot \frac{n}{|n|} \right|$$

18. Calcular la distancia del punto $P = (-1, 3, 4)$ y el plano $X = s\,(1, 3, -1) + t\,(2, 1, 2)$.
Solución. De la ecuación del plano $X = s\,(1, 3, -1) + t\,(2, 1, 2)$ se ve que pasa por $P_0 = (0, 0, 0)$ el (el origen) y, por otra parte; el vector

$$n = (1, 3, -1) \times (2, 1, 2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (7, -4, -5)$$

es perpendicular o normal al plano. Según el ejercicio 17, la distancia de $P = (-1, 3, 4)$ al plano es

$$d = \left| (P - P_0) \cdot \frac{n}{|n|} \right| = \left| (-1, 3, 4) - (0, 0, 0) \cdot \frac{(7, -4, -5)}{\sqrt{49 + 16 + 25}} \right| = \frac{13}{\sqrt{10}}$$

19. Mostrar que la distancia entre un plano y una recta (paralelos) está dada por

$$d = \left| (P_p - P_r) \cdot \frac{n}{|n|} \right|$$

donde $n$ es unvector normal al plano, $P_p$ y $P_r$ son puntos del plano y la recta respectivamente.
Solución. Como son paralelos, la distancia entre el plano y la recta es

igual a la distancia de un punto cualquiera $P_r$ de la recta al plano. Por tanto, según el ejercicio 17, la distancia de la recta al plano es

$$d = \left|(P_p - P_r) \cdot \frac{n}{|n|}\right|$$

20. Hacer pasar un plano que contenga a la recta $x = 1 - t$, $y = 2 + t$, $z = 3t$ y además sea paralelo al plano $x + y - 2z = 5$.

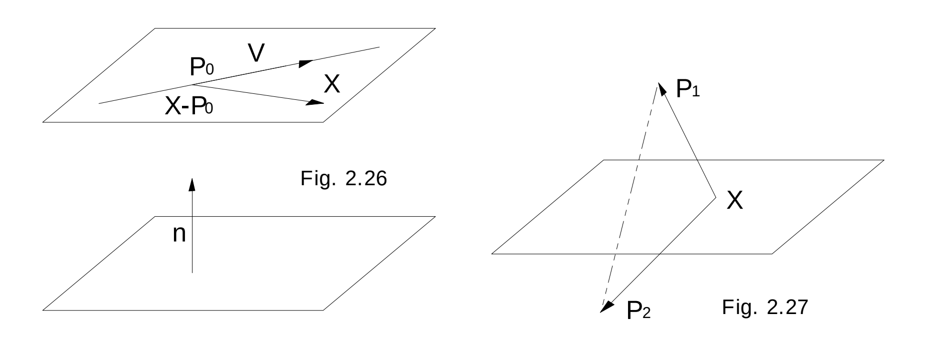


Fig. 2.26

Fig. 2.27

Solución. De $X = (x, y, z) = (1, 2, 0) + t\,(-1, 1, 3)$ se ve que la recta pasa por $P_0 = (1, 2, 0)$ con vector direccional $V = (-1, 1, 3)$. Por otra parte, el vector $n = (1, 1, -2)$ es normal al plano $x + y - 2z = 5$ (ejercicio 13) y como el plano perdido debe ser paralelo al dado, $n$ también debe ser normal al plano pedido. Si $X = (x, y, z)$ es un plano cualquiera del plano pedido, el vector $X - P_0$ está sobre dicho plano. Por tanto este vector debe ser perpendicular a la norma $n$, es decir

$$\begin{aligned} n \cdot (X - P_0) &= 0 \\ (1, 1, -2) \cdot (x - 1, y - 2, z) &= 0 \end{aligned}$$

de donde

$$x + y - 2z = 3$$

es la ecuación del plano pedido.

21. Hallar la ecuación cartesiana del plano que equidista de los puntos $P_1 =$

$(1, 2, -1)$ y $P_2 = (3, 0, -2)$.

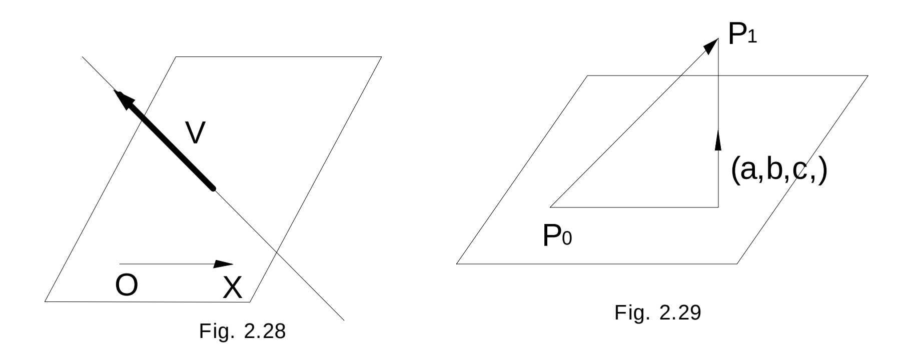


Fig. 2.28
Fig. 2.29

Solución. Si $X = (x, y, z)$ es un punto cualquiera del plano pedido, la distancia de $X$ a $P_1$ de $X$ a $P_2$ deben ser iguales. Es decir

$$\begin{aligned} |X - P_1| &= |X - P_2| \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2} &= \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + (z+2)^2} \end{aligned}$$

tomando cuadrados, desarrollando y después de simplificar obtenemos

$$4x - 2y - 2z = 7$$

ecuación pedida.

22. Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta $X = (1, 2, 3) + t\,(-1, 0, 2)$ y que contenga al origen.
Solución. Si $X = (x, y, z)$ es un punto cualquiera del plano, entonces teniendo en cuenta que el plano pasa por el origen $0 = (0, 0, 0)$, el vector

$$X - 0 = X = (x, y, z)$$

está sobre el plano pedido. Además, por ser la recta perpendicular al plano, su vector direccional $V = (-1, 0, 2)$ es perpendicular al plano y por tanto

$$\begin{aligned} V \cdot (X - 0) &= (-1, 0, 2) \cdot (x, y, z) = 0 \\ -x + 2z &= 0 \end{aligned}$$

es la ecuación del plano pedido.

23. Mostrar que la distancia del punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ al plano $ax + by + cz + d = 0$ es

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Solución. Haciendo $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación del plano se obtiene el punto $P_0 = \left(0, 0, -\frac{d}{c}\right)$ sobre el plano. Como el vector $P_1 - P_0$ va del punto $P_0$ a $P_1$ y el vector $(a, b, c)$ es normal al plano (ejercicio 13), la proyección del vector $P_1 - P_0$ sobre este vector normal da la distancia del punto al plano (Fig. ###). Es decir

$$
\begin{aligned}
d &= \left|(P_1 - P_0) \cdot \frac{(a,b,c)}{|(a,b,c)|}\right| \\
d &= \left|\left(x_1, y_1, z_1 + \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{(a,b,c)}{|(a,b,c)|}\right| \\
d &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}
\end{aligned}
$$

donde se ha tomado el valor absoluto para evitar distancias negativas.

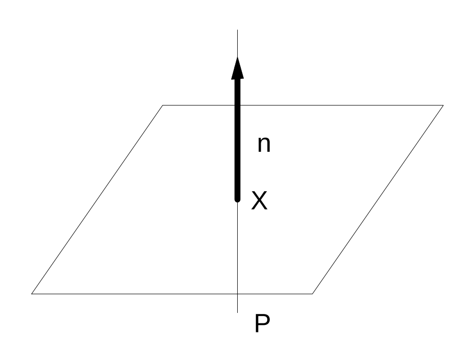
24. Hallar la distancia del punto $P_1 = (-2, 15, -7)$ al plano $5x - 14y + 2z = 0$. Solución. De acuerdo al ejercicio anterior, la distancia $d$ del punto al plano es

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|5\,(-2) - 14\,(15) + 2\,(-7) + 9|}{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + 2^2}} \\
d &= \frac{|-225|}{\sqrt{225}} = 15
\end{aligned}
$$

25. Hallar el punto del plano $5x - 14y + 2z + 9 = 0$ que está más próximo al punto $P = (-2, 15, -7)$.
Solución. De la ecuación del plano se tiene que el vector

$$n = (5, -14, 2)$$

es perpendicular al plano. La recta que pasa por $P$ con vector direccional $n$ intersecta al plano dado precisamente en el punto del plano más próximo a $P$.



Entonces, si $X = (x, y, z)$ es el punto pedido,

$$(x, y, z) = P + tn = (-2, 15, -7) + t\,(5, -14, 2)$$

por estar en la recta.
ó

$$\begin{aligned} x &= -2 + 5t \\ y &= 15 - 14t \\ z &= -7 + 2t \end{aligned}$$

igualando componentes y reemplazando en la ecuación del plano dado (por estar $X$ en el plano).

$$5x - 14y + 2z + 9 = 5\,(-2 + 5t) - 14\,(15 - 14t) + 2\,(-7 + 2t) = 0.$$

De donde se obtiene $t = 1$

$$\begin{aligned} x &= -2 + 5 = 3 \\ y &= 15 - 14 = 1 \\ z &= -7 + 2 = -5 \end{aligned}$$

Por tanto, el punto $X = (3, 1, -5)$ es el punto del plano más próximo a $P = (-2, 15, -7)$.

26. Hallar la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la recta $x = 2t$, $y = t$ y $z = -3t$ en el origen y es paralela a plano $x + y + z = 1$.
Solución. Sea $X = (x, y, z)$ un punto cualquiera de la recta pedida. Como las rectas se cortan en el origen, la recta pedida pasa obviamente por el orige 0 y, por tanto, el vector $X - 0 = X$ está sobre la recta. Entonces el vector $X = (x, y, z)$ es un vector direccional de la recta pedida.
Además, de la ecuación de la recta dada $X = (x, y, z) = t\,(2, 1, -3)$ se ve que $V = (2, 1, -3)$ es un vector direccional de esta recta.
Como las rectas son perpendiculares, lo son también sus vectores direccionales $X$ y $V$; es decir

$$V \cdot X = 0 \quad \text{ó} \quad (2, 1, -3) \cdot (x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

Por otra parte, por ser paralela al plano $x + y + z = 1$, la recta pedida es perpendicular a la normal $n = (1, 1, 1)$ del plano. En particular, el vector direccional de la recta, $X$, es perpendicular a la normal del plano $n$. Es decir

$$n \cdot X = 0 \quad \text{ó} \quad (1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = 0 \qquad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se tiene

$$\begin{array}{l} 2x + y - 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \qquad (3)$$

expresando todas las variables en términos de una de ellas, digamos $z$, tenemos

$$\begin{array}{l} 2x+y-3z=0 \\ x+y+z=0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x-4z=0 \\ -y-5z=0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x=4z \\ y=-5z \\ z=z \end{array} \qquad (4)$$

de donde, cambiando $z$ por $t$ en (4), obtenemos la ecuación cartesiana de la recta pedida:

$$x=4t \quad ; \quad y=-5t \quad ; \quad z=t$$

27. Un punto se desplaza en el espacio de modo que en el instante $t$ su posición viene dada por el vector $X(t)=(1-t,2-3t,2t-1)$. a) Mostrar que el punto se mueve a lo largo de una recta (digamos $L$). b) Hallar un vector paralelo a $L$. c) En qué instante el punto toca al plano $2x+3y+2z+1=0$? d) Hallar la ecuación cartesiana del plano paralelo al de la parte c) y que contiene al punto $X(2)$. e) Hallar la ecuación cartesiana del plano perpendicular a $L$ que contenga a $X(2)$.
Solución. a) Como $X(t)=(1-t,2-3t,2t-1)=(1,2,-1)+t(-1,-3,2)$ el punto se mueve a lo largo de la recta $L$ (que pasa por $P_0=(1,2,-1)$ con vector direccional $V=(-1,-3,2)$.
b) Como la dirección de la recta está dada por su vector direccional $V$, un vector paralelo a $L$ es el mismo $V=(-1,-3,2)$.
c) Cuando el punto $X(t)=(1-t,2-3t,2t-1)$ esté en el plano $2x+3y+2z+1=0$ se tendrá

$$2(1-t)+3(2-3t)+2(2t-1)+1=0$$

de donde resolviendo, se tiene $t=1$. Por tanto, el punto está en el plano en el instante $t=1$.
d) Primero localizamos el punto $X(3)=(1-3,2-3(3),2(3)-1)=(-2,-7,5)$. El vector $n=(2,3,2)$ es normal al plano $2x+3y+2z+1=0$ (ejercicio 13) y debe ser también normal al plano pedido (por ser paralelos los planos dado y pedido). Por tanto, teniendo en cuenta que debe pasar por el punto $X(3)=(-2,-7,5)$, obtenemos $n\cdot(X-P)=0\Rightarrow(2,3,2)\cdot[(x,y,z)-(-2,-7,5)]=0\Rightarrow 2x+3y+2z+15=0$.
e) Primeramente localizamos $X(2)=(1-2,2-6,4-1)=(-1,-4,3)$. Si $X(x,y,z)$ es el punto cualquiera del plano y como el punto $X(2)$ también está sobre el plano pedido.
Por otra parte, como la recta $L$ y el plano son perpendiculares, el vector direccional $V$ es perpendicular a cualquier vector que esté sobre el plano

(Fig. ###). Es decir.

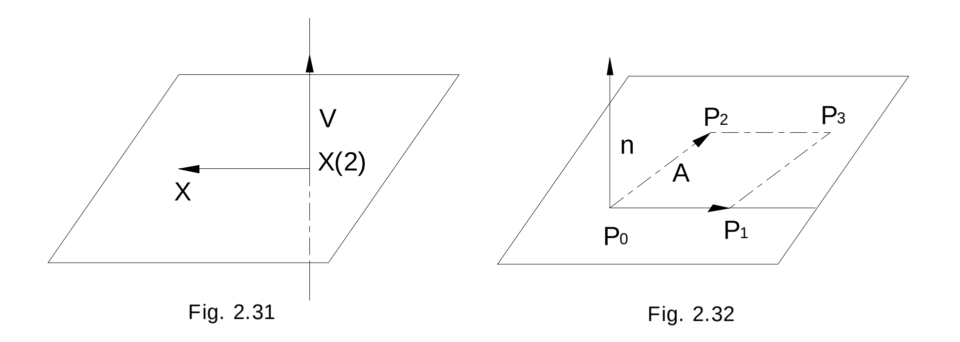



Fig. 2.31

Fig. 2.32

$$V \cdot (X - X(2)) = 0$$

ó

$$(-1,-3,2) \cdot [(x,y,z) - (-1,-4,3)] = 0$$

de donde, finalmente, obtenemos

$$x + 3y - 2z + 19 = 0$$

la ecuación cartesiana del plano pedido.

28. Dados los puntos $P_0 = (1,1,-3)$ y $P_1 = (2,2,0)$ que se encuentran sobre el plano $x + 2y - z = 6$, determinar los demás vértices del cuadrado sobre el plano cuyos vértices adyacentes son $P_0$ y $P_1$.
Solución. Para determinar los otros vértices del cuadrado $P_2$ y $P_3$ (Fig. ###) necesitamos determinar el vector $A = P_2 - P_0 = P_3 - P_1$. El vector $n = (1,2,-1)$ es perpendicular al plano (Ejercicio 13). Como $A$ está sobre el plano es perpendicular al vector $n$; y además, por estar sobre un lado del cuadrado es perpendicular al vector $P_1 - P_0$.

$$P_1 - P_0 = (1,1,3)$$

De acuerdo al significado del producto vectorial, $A$ es paralelo al vector $n \times (P_1 - P_0)$

$$n \times (P_1 - P_0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (7,-4,-1)$$

Por lo tanto

$$A = k(7,-4,-1) \qquad (1)$$

Como $|A|$ y $|P_1 - P_0|$ son lados del cuadrado

$$|A| = |P_1 - P_0| = |(1,1,3)| = \sqrt{11}$$

De acuerdo a (1)

$$|A| = |k|\,|(7,-4,-1)| = |k|\sqrt{66}$$
$$|k| = \frac{1}{\sqrt{6}} \qquad k = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Tomando $k = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $A = \frac{1}{\sqrt{6}}(7,-4,-1)$. De donde,

$$P_2 = P_0 + A = (1,1,-3) + \frac{1}{\sqrt{6}}(7,-4,-1) = \left(1+\frac{7}{\sqrt{6}}, 1-\frac{4}{\sqrt{6}}, -3-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$
$$P_3 = P_1 + A = (2,2,0) + \frac{1}{\sqrt{6}}(7,-4,-1) = \left(2+\frac{7}{\sqrt{6}}, 2+\frac{4}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

son los otros vértices del cuadrado.
Nota. Tomando $k = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, de manera similar, obtenemos otra solución.

**CILINDROS Y SUPERFICIES**

29. Graficar la superficie cuya ecuación es $x = 2z$.

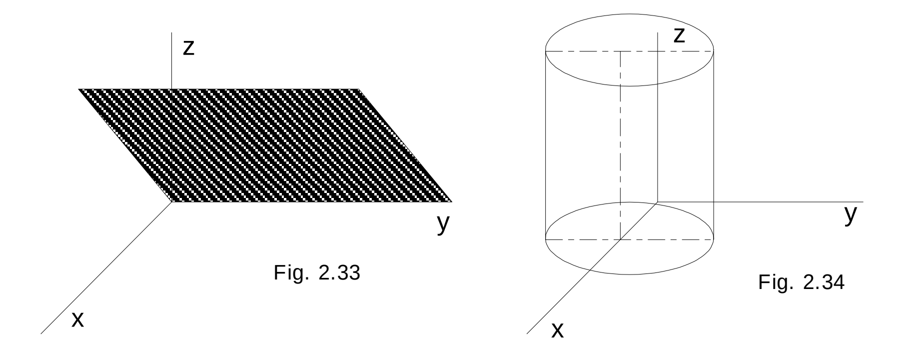


Fig. 2.33

Fig. 2.34

Solución. Antes que nada, observamos que en la ecuación no figura la variable $y$. Además, en el plano $xz$, la ecuación $x = 2z$ representa una recta. Deslizando esta recta paralelamente al eje $y$, obtenemos la superficie pedida (un plano). Su gráfica se muestra en la figura ###.

30. Graficar la superficie cuya ecuación es $x^2 - 2x + 4y^2 = 0$.
Solución. Como la variable $z$ no figura en la ecuación, su gráfica debe ser paralela al eje $z$. Es superficie, por tanto, trazar la gráfica de la ecuación sobre el plano $xy$ y luego deslizarla paralelamente al eje $z$. De

$$x^2 - 2x + 4y^2 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 + 4y^2 = 1$$
$$(x-1)^2 + 4y^2 = 1$$

se ve que la traza en el plano $xy$ es una elipse con centro en $(1,0)$; con semieje mayor igual a 1 y semieje menor $\frac{1}{2}$.

Deslizando la anterior elipse paralelamente al eje $z$ obtenemos el cilindro elíptico que se muestra en la figura ###.

31. Identificar y graficar la superficie cuádrica $x^2 + y^2 = z^2$.

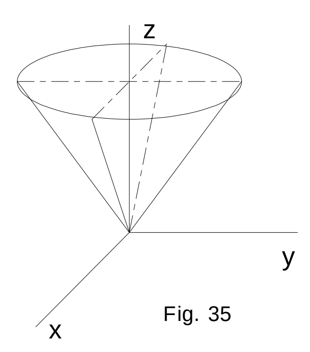


Fig. 35

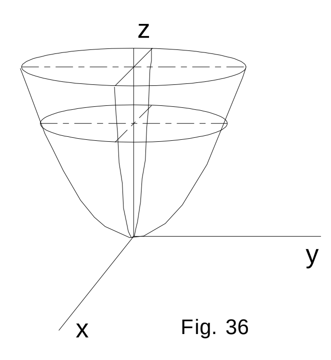


Fig. 36

Solución. Teniendo en cuenta las superficies dadas en la página ###, se ve que la superficie es un cono. Para graficar procedemos siguiendo las recomendaciones generales.
1. Trazas. En el plano $xy$: con $z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \implies x = 0, y = 0$ (un punto).
En el plano $xz$: con $y = 0 \Rightarrow x^2 = z^2 \Rightarrow x = \pm z$ (dos rectas).
En el plano $yz$: con $x = 0 \Rightarrow y^2 = z^2 \Rightarrow y = \pm z$ (dos rectas).
2. Interesecciones con los ejes.
Con el eje $x$: con $y = 0$, $z = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (el origen).
Con el eje $y$: con $x = 0$, $z = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ (el origen).
Con el eje $z$: con $x = 0$, $y = 0 \Rightarrow z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$ (el origen).
3. Algunas secciones planas. Con $z = k$: $x^2 + y^2 = k^2$ (circunferencia). Esto dice que cortando la superficie con planos horizontales ($z = k$) se obtienen circunferencias. Además, las circunferencias tienen mayor radio $(= |k|)$ cuando $z\,(= k)$ esté más alejado del origen.
Reuniendo la información obtenida, se traza la gráfica pedida (Fig. ###).

32. Identificar y graficar la superficie cuádrica $x^2 + y^2 = z$.
Solución. Teniendo en cuenta las ecuaciones de las superficies dadas en la página ###, inmediatamente reconocemos la ecuación como la de un paraboloide elíptico. Siguiendo las recomendaciones generales:
1. Trazas. En el plano $xy$: con $z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, $y = 0$ (un punto).
En el plano $xz$: con $y = 0 \Rightarrow x^2 = z$ (una parábola).
En el plano $yz$: con $x = 0 \Rightarrow y^2 = z$ (una parábola).
2. Intersecciones con los ejes.
Con el eje $x$: $y = 0$, $z = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (el origen).
Con el eje $y$: $x = 0$, $z = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ (el origen).
Con el eje $z$: $x = 0$, $y = 0 \Rightarrow z = 0$ (el origen).

3. Algunas secciones planas. Un corte horizontal se efectúa haciendo $z = k$. Es decir:

$$x^2 + y^2 = k$$

una circunferencia.
Inmediatamente observamos que $k$ debe ser $\geq 0$. Esto dice que el plano $z = -3$ (por ejemplo) no corta a la superficie, por tanto la superficie está situada por encima del plano $z = 0$ (o plano $xy$).
Además, si el corte se realiza a mayor altura (es decir $z = k$, $k$ más grande), la circunferencia que se obtiene tiene maor radio.
Con toda la información obtenida trazamos la gráfica pedida (Fig. ###).

33. Identificar y graficar la superficie $x^2 - y^2 - z^2 = 1$.
Solución. Comparando con las ecuaciones de la página ###, reconocemos a la ecuación dada como la de un paraboloide de dos hojas con eje, el eje $x$. Procediendo según las recomendaciones generales:
1. Trazas.
En el plano $xy$: con $z = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$ (hipérbola).
En el plano $xz$: con $y = 0 \Rightarrow x^2 + z^2 = 1$ (hipérbola).
En el plano $yz$: con $x = 0 \Rightarrow -y^2 - z^2 = 1 \Rightarrow -\left(x^2 + z^2\right) = 1$ (no hay traza).
2. Intersecciones con los ejes.
Con el eje $x$: $y = 0$, $z = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ (dos puntos).
Con el eje $y$: $x = 0$, $z = 0 \Rightarrow -y^2 = 1$ (no hay intersección).
Con el eje $z$: $x = 0$, $y = 0 \Rightarrow -z^2 = 1$ (no hay intersección).
3. Algunas secciones planas. Conviene analizar a varias alturas de $x$. Con $x = k$ se tiene:

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 + z^2 = k^2 - 1 \qquad (1)$$

lo que tiene sentido si $k^2 - 1 \geq 0$, es decir si $k \leq -1$ ó $k \geq 1$. Por tanto, una parte de la superficie está delante de $x = 1$ y la otra parte queda por detrás de $x = -1$. Además, de (1) se ve que los cortes a determinadas alturas de $x$ producen circunferencias; y el radio aumenta a medida que nos alejamos del origen.
Reuniendo toda la información obtenida trazamos la gráfica que se muestra

en la figura ###.

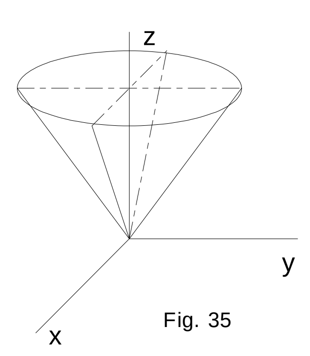



Fig. 35

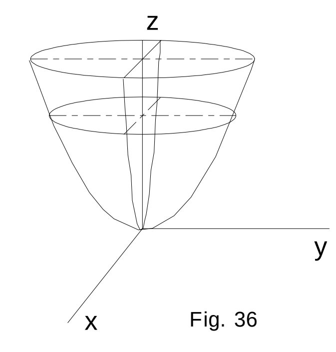



Fig. 36

## 2.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar las ecuaciones vectorial y cartesiana de la recta que pasa por el punto $P_0$ con vector direccional $V$, cuando: a) $P_0 = (0,0,0)$, $V = (1,1,1)$; b) $P_0 = (5,3,-2)$, $V = (2,-3,2)$; c) $P_0 = (-1,-3,-5)$, $V = (-2,7,3)$; d) $P_0 = (3,2,1)$, $V = (1,5,-4)$.

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos: a) $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$; b) $(8,-3,2)$ y $(5,0,0)$; c) $(5,8,1)$ y $(2,6,-1)$; d) $(1,1,1)$ y $(-3,2,-1)$

3. Calcular la distancia del punto $P_1$ a la recta dada: a) $P_1 = (1,1,1)$ ; $X = (1,2,-1) + t\,(3,4,1)$. b) $P_1 = (0,0,-1)$ ; $X = (1,-0,-1) + t\,(1,2,3)$. c) $P_1 = (5,5,0)$ ; $x = t$ , $y = 1 - t$ , $z = 3 + t$. d) $P_1 = (4,-1,2)$ ; $x = 1 + 3t$ , $y = 2t$ , $z = -t$.

4. Calcular la distancia del punto $P_0$ a la recta que pasa por los puntos $P_1$ y $P_2$: a) $P_0 = (5,3,-1)$ , $P_1 = (4,0,2)$ , $P_2 = (5,0,0)$. b) $P_0 = (1,0,10)$ , $P_1 = (10,5,0)$ , $P_2 = (5,10,0)$. c) $P_0 = (-1,-2,3)$ , $P_1 = (-1,1,3)$ , $P_2 = (4,-1,3)$.

5. Calcular el ángulo entre las rectas: a) $X = (1,2,1) + t\,(4,1,1)$ y $X = (2,0,0)+t\,(1,1,0)$. b) $X = (1,0,5)+t\,(1,-1,2)$, $X = (1,1,3)+t\,(4,-1,2)$. c) $x = 4 - 2t$ , $y = 3 + 2t$ , $z = -t$ y $x = 1 + t$ , $y = 1 + 3t$ , $z = 1 - 3t$. d) $x = 1$ , $y = 1$ , $z = t$ y $x = t$ , $y = 1$ , $z = 1$.

6. Hallar los ángulos que forma la recta $x = t$ , $y = 2t$, $z = t$ con los ejes coordenados.

7. Mostrar que las siguientes rectas forman un triángulo rectángulo en el espacio: $X = (1,5,-3) + t\,(1,-1,5)$ ; $X = (3,6,1) + t\,(1,2,-1)$ ; $X = (1,2,3) + t\,(2,1,4)$.

8. Calcular la distancia entre las siguientes rectas: a) $X = (1,3,2) + t\,(1,-1,0)$ y $X = (0,1,2) + t\,(4,1,1)$. b) $X = (4,2,5) + t\,(1,0,-1)$ y $X = (1,1,2) + t\,(2,0,-1)$. c) $x = t$ , $y = 2t$ , $z = 3t$ y $x = 1 - t$ , $y = 2 + 2t$, $z = 1 - 3t$. d) $x = 2 + t$ , $y = -t$ , $z = 1 + 3t$ y $x = 2t$ , $y = 1 + 2t$ , $z = 2 + 6t$.
**EL PLANO**

9. Hallar la ecuación vectorial del plano que pasa por los puntos: a) $P_0 = (7,2,3)$ , $P_1 = (4,5,6)$ , $P_2 = (-1,0,1)$. b) $P_0 = (0,0,0)$ , $P_1 = (1,0,0)$ , $P_2 = (0,1,0)$. c) $P_0 = (0,0,5)$ , $P_1 = (4,3,0)$ , $P_2 = (1,5,7)$.

10. Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por los puntos: $P_0 = (1,2,1)$ , $P_1 = (2,-1,0)$ , $P_2 = (4,1,-2)$. b) $P_0 = (1,-1,0)$ , $P_1 = (4,2,-3)$ , $P_2 = (1,2,3)$. c) $P_0 = (2,-1,5)$ , $P_1 = (0,-1,0)$, $P_2 = (0,0,1)$.

11. Hallar la distancia del punto $P$ al plano dado: a) $P = (0,0,0)$ ; plano $X = (1,2,3) + s\,(4,-1,0) + t\,(1,3,-1)$. b) $P = (-1,2,1)$ ; plano $X = (4,0,-1) + s\,(0,1,0) + t\,(0,0,1)$. c) $P = (4,1,3)$ ; plano $x + y + z = 6$. d) $P = (1,2,3)$ ; plao $x - y = 5$.
**PROBLEMAS VARIOS**

12. Hallar la intersección de la recta $X = (3,1,3) + t\,(1,1,-1)$ con cada uno de los planos coordenados.

13. Determinar el punto donde la recta que pasa por $(1,3,1)$ y es ortogonal al plano $3x - 2y + 5z = 15$, intersecta a dicho plano.

14. Mostrar que los planos $X = (2,0,4) + s\,(1,7,3) + t\,(-3,8,0)$ y $X = (3,2,3) + s\,(4,-1,3) + t\,(9,5,9)$ son paralelos y encuentre la distancia entre ellos.

15. Encontrar la ecuación del plano que pasa por $(1,2,-3)$ y contiene a la recta $X = (1,1,1) + t\,(5,-2,3)$.

16. Una recta con vector direccional $V$ es paralela a un plano $M$ si $V$ es paralelo a $M$. Sea $L$ la recta que pasa por $(1,1,1)$ y tiene vector direccional $(2,-1,3)$, determinar si $L$ es paralela a cada uno de los planos siguientes: a) Plano que pasa por $(1,1,-2)$ y generado por $(2,1,3)$ y $\left(\frac{3}{4}1,1\right)$. b) Plano que paa por $(1,1,-2)$, $(3,5,2)$ y $(2,4,-1)$. c) Plano de ecuación cartesiana $x + 2y + 3z = -3$.

17. Hallar la rcta que pasa por $(1,2,3)$ y es perpendicular al plano $x - y + 2z = 0$.

18. Mostrar que la distancia $d$ del punto $P_1$ a la recta $X = P_0 + tV$ está dada por:
$$d = \left|(P_1 - P_0) \times \frac{V}{|V|}\right|$$

19. Mostrar que la distancia $d$ del punto $P_1$ a la recta $X = P_0 + sU + tV$ y $X = P_1 + sU + tV$ está dada por

$$d = \left|(P_1 - P_0) \times \frac{U \times V}{|U \times V|}\right|$$

20. Mostrar que la distancia $d$ entre los planos paralelos $ax + by + cz = d_1$ , $ax + by + cz = d_2$ está dada por

$$d = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

# Chapter 3

# CURVAS

Una curva es una función de $R$ en $R^n$ (con $n = 2$ o $n = 3$). Si $n = 2$ la curva se llama curva plana y si $n = 3$ la curva se dice que está en el espacio.

**Example 18** *La función $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$ es una curva en el espacio (figura 3.1). Esta función también se puede escribir como $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$; se la denomina hélice.*

**Example 19** *La función $f(t) = \left(t, t^2\right)$ es una curva plana. También se puede expresar como $x = t$, $y = t^2$ (Fig. 3.2) y es la conocida parábola (notemos que $y = x^2$).*

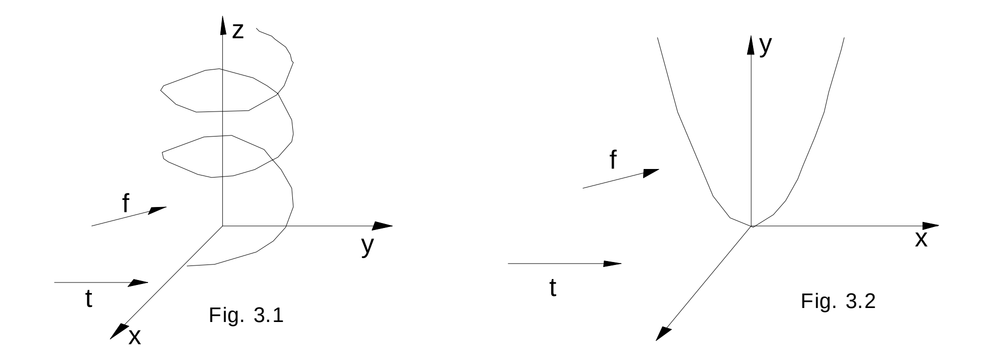


Fig. 3.1

Fig. 3.2

## 3.1 DERIVADA DE UNA CURVA

Consideremos una función $f$ de $R$ en $R^n$. Cuando el límite existe, el vector $f'(t)$ definido por

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \tag{3.1}$$

se denomina la derivada de $f$ en el punto $t$.

La derivada de una curva se puede expresar en términos de derivadas de funciones de $R$ en $R$.

**Example 20** *Si* $n = 3$ *y escribiendo* $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *la derivada* $f'(t)$ *se convierte en*

$$f'(t) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \tag{3.2}$$

*(La derivada se obtiene derivando componente a componente).*

**Example 21** *a) Si* $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$ *entonces* $f'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$
*b) Si* $f(t) = (t, t^2)$ *entonces* $f'(t) = (1, 2t)$.

### 3.1.1 Significado geométrico

Geométricamente definimos a $f'(t)$ como vector tangente a la curva en el punto $f(t_0)$. La recta que pasa por $f(t_0)$ con vector direccional $f'(t_0)$, es la recta tangente a la curva en el punto $f(t_0)$.

### 3.1.2 Significado físico

Físicamente, si $t$ denota el tiempo, entonces $f(t)$ describe la trayectoria de una partícula, y $f(t_0)$ representa la posición de la partícula en el instante $t_0$. La derivada $f'(t_0)$ se llama vector velocidad; además el número $|f'(t_0)|$ es su rapidez. La segunda derivada, $f''(t_0)$, da la aceleración de la partícula en el instante $t_0$.

**Example 22** *Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola* $f(t) = (t, t^2)$ *en el punto* $(2, 4)$.

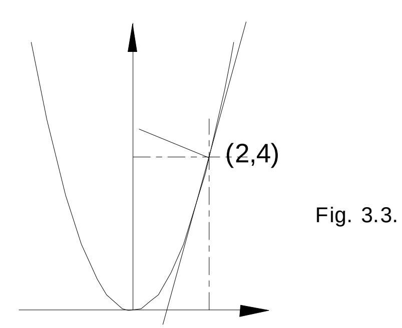



Fig. 3.3.

*Solución. De* $f(t_0) = (t_0, t_0^2) = (2, 4)$ *se tiene* $t_0 = 2$. *La recta tangente que debe pasar por el punto* $(2, 4)$ *tiene como vector direccional.*

$$f'(t_0) = (1, 2t_0) = (1, 4), \text{ con } t_0 = 2$$

*Por tanto la ecuación de la recta tangente es*

$$(x, y) = (2, 4) + t\,(1, 4)$$

*o, igualando componentes,*

$$\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 4 + 4t \end{aligned}$$

**Example 23** *La posición de una partícula está dada por* $f(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$, $t \geq 0$. *En qué instante la partícula está en el plano* $x + z = 0$ *y con qué rapidez se mueve en ese instante?*
*Solución. De* $f(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$ *se tiene* $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$. *La partícula está en el plano* $x + z = 0$ *cuando*

$$t + t^3 = 0 \Rightarrow t\left(1 + t^2\right) = 0 \Rightarrow t = 0$$

*Es decir, cuando* $t = 0$ *(al empezar el movimiento) la partícula está sobre el plano* $x + z = 0$. *Además, su rapidez en ese instante es* $|f'(t)| = |(1, 0, 0)| = 1$, *con* $t = 0$.

## 3.2 REGLAS DE DERIVACIÓN

Como la derivada de una curva se expresa en términos de las derivadas de sus componentes, las reglas de derivación son básicamente las mismas que han sido estudiadas en el Cálculo I.

I. Si $f(t)$ y $g(t)$ son dos curvas derivables, entonces

$$\frac{d}{dt}\left(f(t) + g(t)\right) = \frac{d}{dt}f(t) + \frac{d}{dt}g(t)$$

(La derivada de la suma es la suma de las derivadas).

II. Si $a$ es un número y $f(t)$ es una curva derivable,

$$\frac{d}{dt}\left(af(t)\right) = a\frac{d}{dt}f(t)$$

(se pueden extraer las constantes del signo de derivación).

III. Si $c(t)$ es una función de $R$ en $R$ derivable y $f(t)$ una curva derivable, entonces

$$\frac{d}{dt}\left(c(t)\,f(t)\right) = c(t)\,\frac{d}{dt}f(t) + f(t)\,\frac{d}{dt}c(t)$$

IV. Si $f(t)$ y $g(t)$ son dos curvas derivables, entonces

$$\frac{d}{dt}\left(f(t) \cdot g(t)\right) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot \frac{d}{dt}g(t)$$

(esto es una generalización de la derivada del producto del Cálculo I a la derivada del producto escalar de dos curvas).

## 3.3 LONGITUD DE UNA CURVA

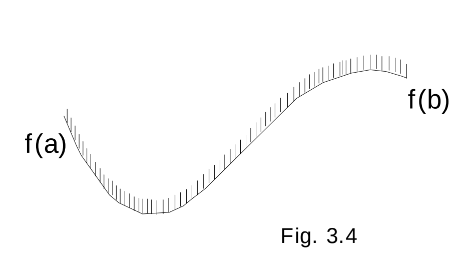



Fig. 3.4

La longitud $L$ de una curva $f(t)$ desde $f(a)$ hasta $f(b)$ se define como la integral de la rapidez desde $a$ hasta $b$. Es decir

$$L = \int_a^b |f'(t)|\, dt \tag{3.3}$$

**Example 24** *Calcular la longitud de una circunferencia de radio $R$.*
*Solución. La ecuación paramétrica de una circunferencia de radio $R$ es $f(t) = (R\cos t, R\sin t)$, con $0 \le t \le 2\pi$. Buscamos la longitud de la curva desde $f(0) = (R,0)$ hasta $f(2\pi) = (R,0)$ - el mismo punto, después de dar una vuelta a la circunferencia -, además como $f'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$, $|f'(t)| = R$, se tiene*

$$L = \int_a^b |f'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$$

## 3.4 REGLA DE LA CADENA

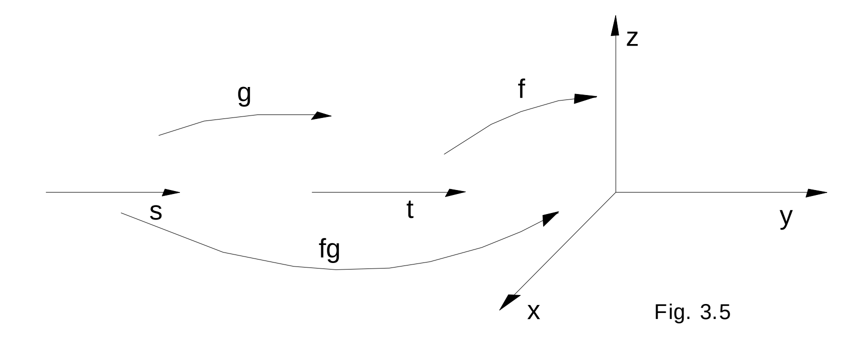



Fig. 3.5

Consideremos una función $g = g(s)$ de $R$ en $R$ y una función $f = f(t)$ de $R$ en $R^n$. Si ambas funciones son derivables, la composición $f \circ g$ es también

derivable, además

$$(f \circ g)'(s) = f'(g(s))\, g'(s)$$

## 3.5 ALGUNAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LAS CURVAS

Conviene considerar a la curva $f = f(t)$ como describiendo la posición de una partícula en movimiento.

El vector unitario $T$ definido por

$$T = \frac{f'(t)}{|f'(t)|} \tag{3.4}$$

se llama **vector tangente unitario**. Como se sabe, este vector $T$ es un vector direccional de la recta tangente a la curva en el punto $f(t)$.

El vector unitario $N$ dado por

$$N = \frac{(f'(t) \times f''(t)) \times f'(t)}{|(f'(t) \times f''(t)) \times f'(t)|} \tag{3.5}$$

se llama **normal principal** a la curva y es perpendicular al vectr tangente $T$.

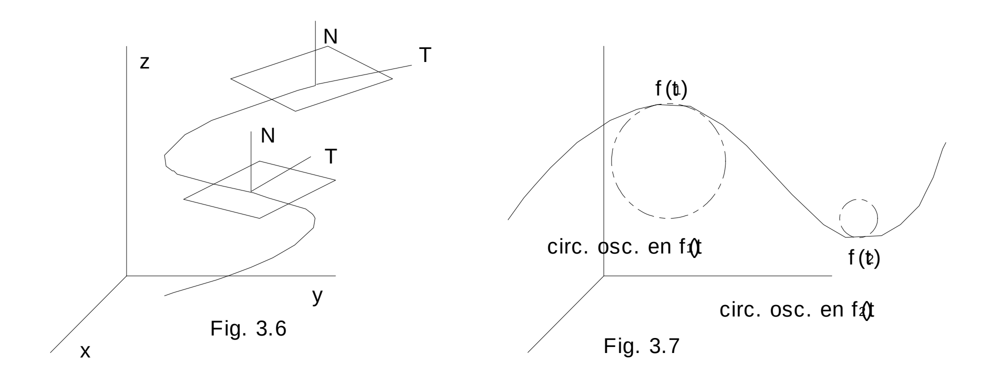



Fig. 3.6 Fig. 3.7

El plano que pasa por $f(t)$ y es generado por los vectores $T$ y $N$ se llama **plano osculador**. El plano osculador a la curva en el punto $f(t)$ es el plano que mejor se ajusta o adapta a la curva en el punto $f(t)$. Por ejemplo, si la curva es plana (no necesariamente una recta) el plano osculador coincide con el pano que contiene a la curva.

El número no negativo $k$ dado por

$$k = \frac{|f'(t) \times f''(t)|}{|f'(t)|^3} \tag{3.6}$$

se llama **curvatura**. Cuando $k \neq 0$, su inverso se denomina **radio de curvatura** y se simboliza por $\rho$. Es decir $\rho = \frac{1}{k}$. En general la curvatura, y por

tanto el radio de curvatura, varía según varia el punto $f(t)$ a lo largo de la curva. La círculo sobre el plano osculador, de radio $\rho$, centro ubicado sobre la normal principal y pasando por $f(t)$ se llama **círculo osculador** en $f(t)$. El círculo osculador en $f(t)$ es el círculo que mejor se ajusta a la curva. Por ejemplo, el círculo osculador en cualquier punto de una circunferencia es la misma circunferencia. Si $R$ es el radio de la circunferencia, entonces la curvatura es $\frac{1}{R}$.

Intuitivamente, cuando $k$ es grande en un punto, la curva se "curvea" más en ese punto; y si $k$ es bastante pequeño, la curva se "curvea" tan solo levemente en dicho punto.

En el caso extremo, si $k = 0$ en un punto de la curva, entonces la curva no se "curvea" en ese punto y, dehecho, puede considerarse a la curva como una recta en ese punto. La curvatura de una recta en todos sus puntos es cero.

## 3.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

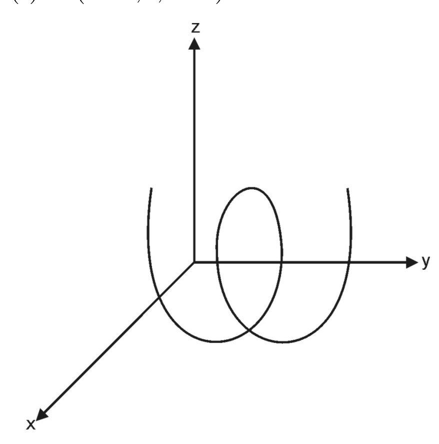
Derivada y recta tangente. El cálculo de la derivada de una curva se reduce a la derivada de sus componentes. Geométricamente la derivada da un vector tangente a la curva.

1. Mostrar que si $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ entonces $f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$; (asumir la existencia de $f'(t)$).
   Solución. Suponiendo que $f'(t)$ existe, se tiene:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[ (x(t+h), y(t+h), z(t+h)) - (x(t), y(t), \acute{z}(t)) \right] \\ &= \left( \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} \right) \\ &= (x'(t), y'(t), z'(t)) \end{aligned}$$

2. Calcular la derivada primera y segunda de las siguientes funciones. a) $f(t) = \left(t^2, 2t-1\right)$, b) $f(t) = (3\cos t, \sin 2t, 2t)$ , c) $f(t) = \left(t^2, 1-t, 4-t^3\right)$ en $t = 1$.
   Solución. a) $f(t) = \left(t^2, 2t-1\right) \Rightarrow f'(t) = (2t, 2) \Rightarrow f''(t) = (2, 0)$; $f'(1) = (2, 2)$ , $f''(t) = (2, 0)$.
   b) $f(t) = (3\cos t, \sin 2t, 2t) \Rightarrow f'(t) = (-3\sin t, 2\cos 2t, 2) \Rightarrow f''(t) = (-3\cos t, -4\sin 2t, 0)$.
   c) $f(t) = \left(t^2, 1-t, 4-t^3\right) \Rightarrow f'(t) = \left(2t, -1, -3t^2\right) \Rightarrow f''(t) = (2, 0, -6t)$ ; $f'(1) = (2, -1, -3)$ , $f''(t) = (2, 0, -6)$.

3. Trazar la curva $f(t) = (\cos t, t, \sin t)$.




Solución. Haciendo $(x, y, z) = (\cos t, t, \sin t)$ tenemos $x = \cos t$, $y = t$, $z = \sin t$.
Observamos que:

$$\begin{aligned} x &= \cos t \ ; \ z = \sin t \\ x^2 &= \cos^2 t \ ; \ z^2 = \sin^2 t \\ x^2 + z^2 &= \cos^2 t + \sin^2 t \\ x^2 + z^2 &= 1 \quad \text{(circunferencia)} \end{aligned}$$

Esto dice que la proyección de la curva sobre el plano $xz$ describe una circunferencia. Como al variar $t$, la segunda componente $y = t$ obviamente varía; la curva va dando vueltas alrededor del eje $y$ a la vez que se desplaza en torno a este eje, describiendo una curva parecida a un resorte. La gráfica de la curva se mustra en la Fig. ###.

4. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(t) = (t, \cos \pi t, \sin \pi t)$:
a) En cualquier punto ; b) en el punto $(1, -1, 0)$.
Solución. a) Un vector direccional de la recta tangente en el punto $f(t)$ es

$$f'(t) = (1, -\pi \sin \pi t, \pi \cos \pi t)$$

y como además pasa por el punto $f(t) = (t, \cos \pi t, \sin \pi t)$, su ecuación es

$$X = (t, \cos \pi t, \sin \pi t) + s(1, -\pi \sin \pi t, \pi \cos \pi t)$$

con $s$ real.
b) De $(t, \cos \pi t, \sin \pi t) = (1, -1, 0)$ e igualando componentes vemos que el punto $(1, -1, 0)$ le corresponde a $t = 1$. De la parte a) con $t = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} X &= (1, co\pi, \sin \pi) + s(1, -\sin \pi, \pi \cos \pi) \\ X &= (1, -1, 0) + s(1, 0, -\pi) \end{aligned}$$

ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1, -1, 0)$.

5. Encontrar la recta tangente a la cúbica $f(t) = \left(1, \frac{1}{2}t^2, t^3\right)$ paralela a la recta $x = t$, $y = 2 - t$, $z = 1 + 3t$.
Solución. Habiendo $X = (x, y, z) = (t, 2 - t, 1 + 3t) = (0, 2, 1) + t(1, -1, 3)$ vemos que un vector direccional de la recta dada es $U = (1, -1, 3)$. Un vector direccional de la recta tangente a la cúbica en $f(t)$ es

$$V = f'(t) = \left(1, t, 3t^2\right)$$

Como la recta dada y la recta tangente deben ser paralelas, sus vectores direccionales también deben serlo. Es decir

$$V = kU \Rightarrow \left(1, t, 3t^2\right) = k(1, -1, 3) \Rightarrow 1 = k\ ;\ t = -k\ ;\ 3t^2 = 3k$$

de donde $t = -1$. Por tanto, la recta tangente a la curva, paralela a la recta dada, es la tangente en el punto $f(-1)$:

$$X = f(-1) + tf'(-1) = \left(-1, \frac{1}{2}, -1\right) + t(1, -1, 3)$$

6. Consideremos el arco de hélice $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$ con $0 \leq t$.

7. Encontrar todos los puntos en que la curva $f(t) = (\sin t, \cos t, \sin 3t)$ tiene un vector tangente paralelo al plano $xy$.
Solución. Un vector tangente a la curva en el punto $f(t)$ es

$$f'(t) = (\cos t, -\sin t, 3\cos 3t)$$

el cual es paralelo al plano $xy$ si su tercera componente es cero. Es decir

$$\begin{aligned} 3\cos 3t &= 0 \Rightarrow 3t = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \\ t &= (2k+1)\frac{\pi}{6}\ \ ;\ \ k = 0, \pm 1 \pm 2, ... \end{aligned}$$

Dando valores a $k$ se obtienen los puntos:

$$\begin{aligned} k &= 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right). \\ k &= 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1, 0, -1) \\ k &= 2 \Rightarrow t = 5\frac{\pi}{6} \Rightarrow f\left(5\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \\ k &= 3 \Rightarrow t = 7\frac{\pi}{6} \Rightarrow f\left(7\frac{\pi}{6}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right) \\ k &= 4 \Rightarrow t = 3\frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(3\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0, 1) \\ k &= 5 \Rightarrow t = 11\frac{\pi}{6} \Rightarrow f\left(11\frac{\pi}{6}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right) \end{aligned}$$

Para otros valores de $k$ se obtienen los mismos puntos. Estos son todos los puntos en que la tangente a la curva es paralela al plano $xy$.

8. Mostrar que un rayo de luz que emana del foco de una parábola se refleja paralelamente al eje.

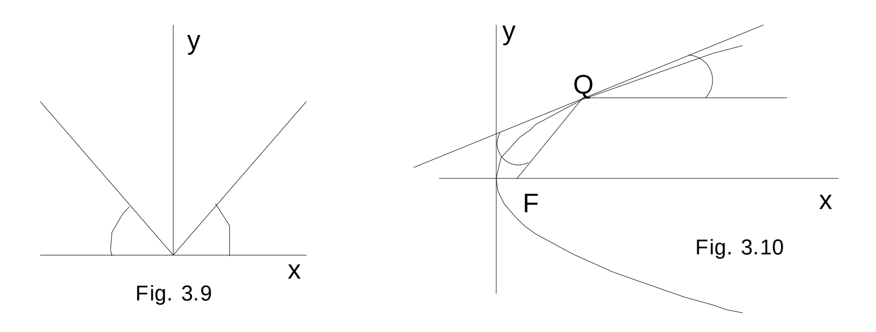


Fig. 3.9 Fig. 3.10

Solución. Simplemente hay que recordar dos cosas. En un espejo plano, el ángulo de incidencia $\theta$ es igual al ángulo de reflexión $\phi$ (Fig. ###); en un espejo curvo, la reflexión en un punto se realiza como si se reflejará en el espejo plano tangente.
Para simplificar, consideremos la parábola $x = y^2$ ó, mejor su parametrización $f(t) = \left(t^2, t\right)$. El foco de la parábola se encuentra en $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ y designemos que $Q = \left(t_0^2, t_0\right)$ el punto donde se refleja el rayo (Fig. ###).
La tangente en $Q$ tiene la dirección de $f'(t_0) = (2t_0, 1)$.
El vector $Q - F$ tiene la dirección del rayo de luz que va del foco $F$ al punto de reflexión $Q$. El ángulo de incidencia $\theta$ está determinado por

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{f'(t_0)\cdot(Q-F)}{|f'(t_0)|\cdot|Q-F|} = \frac{\left(t_0^2-\frac{1}{4}, t_0\right)\cdot(2t_0,1)}{\sqrt{\left(t_0^2-\frac{1}{4}\right)^2+t_0^2}\sqrt{4t_0^2+1}} \\
&= \frac{2t_0^3-\frac{1}{2}t_0^2+t_0}{\sqrt{t_0^2-\frac{1}{2}t_0^2+\frac{1}{16}+t_0^2}\sqrt{4t_0^2+1}} = \frac{2t_0\left(t_0^2+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(t_0^2-\frac{1}{4}\right)^2}\cdot 2\sqrt{t_0^2+\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{t_0}{\sqrt{t_0^2+\frac{1}{4}}}
\end{aligned}$$

Por otra parte, el ángulo $\phi$ entre la recta tangente y la recta que parte de $Q$ paralela al eje $X$, está determinado por

$$\cos\phi = \frac{f'(t_0)\cdot(1,0)}{|f'(t_0)|\cdot|(1,0)|} = \frac{(2t_0,1)\cdot(1,0)}{\sqrt{4t_0^2+1}} = \frac{2t_0}{2\sqrt{t_0^2+\frac{1}{4}}} = \frac{t_0}{\sqrt{t_0^2+\frac{1}{4}}}$$

Por tanto

$$\cos\theta = \cos\phi$$

Esto dice que el rayo que parte del punto $Q$ paralelo al eje $X$, eje de la parábola, es el rayo de reflexión. Esto muestra que el rayo que emana del foco de una parábola se refleja paralelamente al eje.

9. Mostrar que todos los vectores tangentes a la hélice $f(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ forman un ángulo constante con el eje $Z$ y que el coseno de ese ángulo es

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Solución. Un vector direccional dela recta tangente a la hélice en $f(t)$ es $f'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$. El coseno del ángulo que forma la recta tangente a la curva y el eje $z$ es igual al que forman sus vectores direccionales. Entonces

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{f'(t)\cdot(0,0,1)}{|f'(t)|\cdot|0,0,1|} = \frac{(-a\sin t, a\cos t, b)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}} \\ &= \frac{0+0+b}{\sqrt{a^2\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

10. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección del cono $x^2+y^2=z^2$ y el plano $x+y+z=4$, en el punto $(0,2,2)$.
Solución. Antes que nada conviene parametrizar la curva, esto se logra expresando en términos de una de las variables a las otras dos:

$$\begin{matrix} x+y+z=4 \\ x^2+y^2=z^2 \end{matrix} \implies \begin{matrix} z=(4-z-y) \\ z^2=x^2+y^2 \end{matrix} \implies (4-x-y)^2 = x^2+y^2$$

de donde desarrollando y simplificando se tiene $8+xy = 4x+4y$ expresando $y$ en términos de $x$:

$$y = 4\frac{x-2}{x-4} = 4\left(1+\frac{2}{x-4}\right) = 4+\frac{8}{x-4}$$

Ahora también podemos expresar $z$ en términos de $x$,

$$z = 4-x-y = 4-x-4-\frac{8}{x-4} = -x-\frac{8}{x-4}$$

Cambiamos de parámetro haciendo $x=t$; entonces la curva se puede expresar en forma paramétrica por

$$f(t) = (x,y,z) = \left(t, 4+\frac{8}{t-4}, -t-\frac{8}{t-4}\right)$$

De $(0,2,2) = \left(t, 4+\frac{8}{t-4}, -t-\frac{8}{t-4}\right)$ e igualando componentes es ve que el punto $(0,2,2)$ le corresponde a $t=0$.

Un vector direccional de la recta tangente en $(0,2,2)$ (es decir con $t=0$) es

$$f'(t)=\left(1,-\frac{8}{(t-4)^2},-1+\frac{3}{(t-4)^2}\right)=\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

Por tanto, la recta tangente pedida es

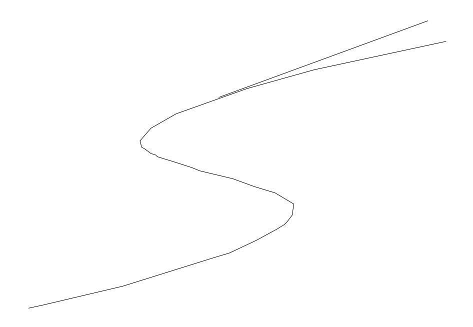
$$X=(0,2,2)+s\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

**VECTOR POSICION**

11. Determinar el punto donde la curva $f(t)=\left(t,1-2t,t^2\right)$ intersecta al plano $x+y+z=7$.
Solución. Si el punto $(x,y,z)$ es el de intersección, tenemos: $(x,y,z)=\left(t,1-2t,t^2\right)$ (por estar en la curva) ó $x=t$ ; $y=1-2t$ ; $z=t^2$ (igualando componentes). Además: $x+y+z=7$ (por estar en el plano). $t+(1-2t)+t^2=7$ (por estar en el plano). $t^2-t-6=0\Rightarrow(t-3)(t+2)=0\Rightarrow t=3$ , $t=-2$. Por tanto, la curva intersecta al plano cuando $t=3$ y cuando $t=-2$ es decir en los puntos

$$t(3)=(3,-5,9) \quad \text{y} \quad f(-2)=(-2,5,4)$$

12. Una partícula viaja hacia arriba en una espiral en el espacio, su posición en el tiempo $t$ está por $f(t)=(\cos t,\sin t,t)$. En el tiempo $t_0=\pi$ toma vuelo sobre una tangente, dejando el camino de la espiral y viajando en línea recta a velocidad constante. Dónde está la partícula en el tiempo $t=3\pi$?



Solución. Cuando $t_0=\pi$, la partícula está en el punto $f(\pi)=(-1,0,\pi)$. La recta tangente en el punto donde la partícula toma vuelo es

$$\begin{aligned}X &= (-1,0,\pi)+sf'(\pi)=\\ &= (-1,0,\pi)+s(-\sin\pi,\cos\pi,1)\\ &= (-1,0,\pi)+s(0,-1,1)\end{aligned}$$

Notemos que cuando $s = 0$, entonces $X = (-1, 0, \pi)$. Es decir la partícula está en el punto donde va a tomar vuelo siguiendo la recta tangente.
El tiempo $s$ que transcurre desde $t_0 = \pi$ hasta $t_1 = 3\pi$ es

$$s = 3\pi - \pi = 2\pi$$

Por tanto, en su desplazamiento a lo largo de la recta tangente y cuando $t = 3\pi$; la partícula está en

$$X = (-1, 0, \pi) + 2\pi (0, -1, 1) = (-1, -2\pi, 3\pi)$$

Longitud de curva.

13. Calcular la longitud de la curva descrita por $f(t) = (\cos t, \sin t)$ al variar $t$ desde $t = 0$ hasta $t = 4\pi$.
Solución. Procedimiento 1. Como $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$, entonces la longitud de la curva desde que $t = 0$ hasta $t = 4\pi$ está dada por

$$L = \int_0^{4\pi} |f'(t)|\, dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{4\pi} dt = 4\pi$$

Procedimiento 2. La curva $f(t) = (\cos t, \sin t)$ describe una circunferencia de radio 1. Al variar $t$ desde $t = 0$ hasta $t = 4\pi$ describe dos vueltas de circunferencia. Como la longitud de una circunferencia de radio 1 es $2\pi$, en total la longitud de la curva que describe es

$$2 \cdot 2\pi = 4\pi$$

14. Calcular la longitud del arco parabólico descrito por $f(t) = \left(t^2, 2t\right)$ desde $(0, 0)$ hasta $(1, 2)$.
Solución. Igualando componentes se ve que el punto $(0, 0) = \left(t^2, 2t\right)$ le corresponde a $t = 0$ y el punto $(1, 2) = \left(t^2, 2t\right)$ a $t = 1$. Como $f'(t) = (2t, 2)$, la longitud del arco descrito es

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 |f'(t)|\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 1 + 4t^2} dt = 2 \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{2} + t^2} dt \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) - \ln\sqrt{2} \end{aligned}$$

Curvatura - normal principal.

15. Hallar $T$, $N$, $k$ para la curva $f(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$. a) En cualquier punto b) Cuando $t = 0$.
Solución. a) Para calcular el vector tangente unitario $T$, la normal principal $N$ y la curvatura $k$, requerimos hasta la segunda derivada de $f(t)$:

$$f(t) = \left(t, t^2, t^3\right) \quad , \quad f'(t) = \left(1, 2t, 3t^2\right) \quad , \quad f''(t) = (0, 2, 6t)$$

Además, teniendo en cuenta las expresiones que figuran en las fórmulas correspondientes debemos calcular:

$$f'(t) \times t''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = \left(6t^2, -6t, 2\right)$$

$$(f'(t) \times f''(t)) \times f'(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6t^2 & -6t & 2 \\ 1 & 2t & 3t^2 \end{vmatrix} = 2\left(-2t - 9t^3, 1 - 9t^4, 3t + 6t^3\right)$$

$$|f'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^2} \quad , \quad |f'(t) \times f''(t)| = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

$$|(f'(t) \times f''(t)) \times t'(t)| = 2\sqrt{81t^8 + 107t^6 + 54t^4 + 13t^2 + 1}$$

Reemplazando en las fórmulas correspondientes tenemos:

$$\begin{aligned} T &= \frac{f'(t)}{|f'(t)|} = \frac{\left(1, 2t, 3t^2\right)}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}} \\ N &= \frac{(f'(t) \times f''(t)) \times f'(t)}{|(f'(t) \times f''(t)) \times f'(t)|} = \frac{\left(-2t - 9t^3, 1 - 9t^4, 3t + 6t^3\right)}{\sqrt{81t^8 + 107t^6 + 54t^4 + 13t^2 + 1}} \\ k &= \frac{|f'(t) \times f''(t)|}{|f'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}} \end{aligned}$$

b) Evaluando en $t = 0$: $T = (1, 0, 0)$, $N = \frac{1}{1}(0, 2, 0) = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ ; $R = 2$.

16. A partir de la fórmula dada para $k$, mostrar que para una curva plana descrita por $f(t) = (x(t), y(t))$, la curvatura viene dada por:

$$k(t) = \frac{|x'(t)\, y''(t) - y'(t)\, x''(t)|}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Solución. Se sabe que la curvatura de una curva en el espacio está dada por:

$$k(t) = \frac{|f'(t) \times f''(t)|}{|f'(t)|^3}$$

como

$$f(t) = (x(t), y(t)) \Rightarrow \begin{array}{l} f'(t) = (x'(t), y'(t)), \\ f''(t) = (x''(t), y''(t)) \end{array}$$

a $f'(t)$ y $f''(t)$ se les puede considerar como vectores del espacio escribiendo

$$f'(t) = (x'(t), y'(t), 0) \quad , \quad f''(t) = (x''(t), y''(t))$$

entonces

$$f'(t) \times f''(t) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ x''(t) & y''(t) & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, x'(t)\, y''(t) - y'(t)\, x''(t))$$

y además

$$|f'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \Rightarrow |f'(t)|^3 = \left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)$$

$$|f'(t) \times f''(t)| = \sqrt{0 + 0 + (x'(t)\,y''(t) - y'(t)\,x''(t))^2} = x'(t)\,y''(t) - y'(t)\,x''(t)$$

finalmente reemplazando obtenemos

$$k = \frac{|f'(t) \times f''(t)|}{|f'(t)|^3} = \frac{|x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)|}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

17. Mostrar que el radio de curvatura de $f(t) = \left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t\right)$ está dado por

$$\rho = \frac{\left(e^t + e^{-t}\right)^2}{\sqrt{2}}$$

Solución. Como $f(t) = \left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t\right) \Rightarrow \begin{array}{l} f'(t) = \left(e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}\right) \\ f''(t) = \left(e^t, e^{-t}, 0\right) \end{array}$ y además,

$$f'(t) \times f''(t) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = \left(-\sqrt{2}e^t, -\sqrt{2}e^t, 2\right)$$

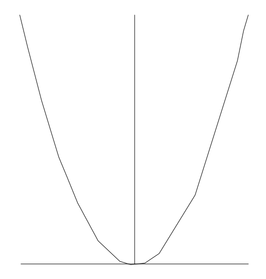
$$|f'(t)| = \sqrt{e^{2t} + 2^{-2t} + 2} = \sqrt{\left(e^t + e^{-t}\right)^2} = e^t + e^{-t}$$

$$|f'(t) \times f''(t)| = \sqrt{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4} = \sqrt{2}\sqrt{\left(e^t + e^{-t}\right)^2} = \sqrt{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$$

Por tanto, teniendo en cuenta que el radio de curvatura es el recíproco de la curvatura,

$$\rho = \frac{1}{k(t)} = \frac{|f'(t)|^3}{|f'(t) \times f''(t)|} = \frac{\left(e^t + e^{-t}\right)^3}{\sqrt{2}\left(e^t + e^{-t}\right)} = \frac{\left(e^t + e^{-t}\right)^2}{\sqrt{2}}$$

18. Mostrar que en el vértices de una parábola el radio de curvatura alcanza su valor mínimo.



Solución. Consideremos la ecuación paramétrica de la parábola.

$$f(t) = (x(t), y(t)) = \left(t, pt^2\right)$$

entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= t \quad \Rightarrow \quad x'(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad x''(t) = 0 \\ x(t) &= pt^2 \quad \Rightarrow \quad y'(t) = 2pt \quad \Rightarrow \quad y''(t) = 2p \end{aligned}$$

y por tanto, reemplazando

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{1}{k(t)} = \frac{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t)|} \\ &= \frac{1 + 4p^2t^2}{|2p|} = \frac{1 + 4p^2t^2}{2\,|p|} \end{aligned}$$

Ahora, $\rho'(t) = \frac{1}{2|p|} \cdot 8p^2 t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$ es un punto crítico. Más aún, $\rho''(t) = \frac{4p^2}{|p|} > 0$; lo que implica que en $t = 0$, el radio de curvatura es un mínimo. Como $f(0) = (0, 0)$ es el vértice de la parábola, hemos mostrado que el radio de curvatura alcanza su valor mínimo en el vértice.

19. Hallar la curvatura de $f(t) = \left(t - \frac{t^3}{3}, t^2, t + \frac{t^3}{3}\right)$. a) En cualquier punto, b) Cuando $t = 0$.
Solución. a) Derivando tenemos:

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(t - \frac{t^3}{3}, t^2, t + \frac{t^3}{3}\right) \\ f'(t) &= \left(1 - t^2, 2t, 1 + t^2\right) \\ f''(t) &= (-2t, 2, 2t) \end{aligned}$$

además

$$f'(t) \times f''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 - t^2 & 2t & 1 + t^2 \\ -2t & 2 & 2t \end{vmatrix} = \left(2t^2 - 2, -4t, 2t^2 + 2\right)$$

$$|f'(t)| = \sqrt{\left(1 - t^2\right)^2 + 4t^2 + \left(1 + t^2\right)^2} = \sqrt{2}\left(t^2 + 1\right)$$

simplificando

$$|f'(t) \times f''(t)| = 2\sqrt{\left(t^2 - 1\right)^2 + 4t^2 + \left(t^2 + 1\right)^2} = 2\sqrt{2}\left(t^2 + 1\right)$$

de donde,

$$k(t) = \frac{|f'(t) \times f''(t)|}{|f'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{2}\left(t^2 + 1\right)}{\left(\sqrt{2}\left(t^2 + 1\right)\right)^3} = \frac{1}{\left(t^2 + 1\right)^2}$$

b) Evaluando en $t = 0$, obtenemos la curvatura pedida: $k(0) = 1$.

## 3.7 EJERCICIOS PROPUESTOS

Graficar las siguientes curvas:

1. $f(t) = (\cos 2t, \sin 2t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
2. $f(t) = (\sin 2t, \cos 2t) \quad , \quad 0 \leq t \leq \pi.$
3. $f(t) = (t, t).$
4. $f(t) = (-t, t).$
5. $f(t) = (t, \cos t, \sin t).$
6. $f(t) = \left(1, t, t^2\right).$
   **DERIVADAS**
   Encontrar las derivadas de las siguientes curvas:
7. $f(t) = (t, t-1, 2t+1).$
8. $f(t) = \left(t, t^2, t^3\right).$
9. $f(t) = (\cos 3t, \sin 3t).$
10. $f(t) = (a \cos t, b \sin t, t).$
11. $f(t) = (e^t, \cos t, \sin t).$
12. $f(t) = (\sin 2t, \ln(1+t), t).$
    **RECTA TANGENTE**
    Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado.
13. $f(t) = (\cos t, \sin t)$ en $(0, 1).$
14. $f(t) = \left(t, 2t, t^2\right)$ en $(1, 2, 1).$
15. $f(t) = \left(t, t^3, t^4\right)$ en $(1, 0, 0).$
16. $f(t) = (1+t, 4+3t, 1-2t)$ en $(1, 1, 1).$
17. $f(t) = \left(t+1, t-t^2, t^3\right)$ en $(2, 0, 1).$
18. La curva determinada por la intersección de la esfera
    $$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$
    y el plano $z = 3$, en $(4, 0, 3)$.
19. La curva determinada por la intersección del cilindro
    $$x^2 + y^2 = 25$$
    y el plano $x + y + z = 5$, en el punto $(3, 4, -2)$.

20. Encontrar la recta tangente a la curva $f(t) = \left(t, 0, t^2\right)$ trazada desde el punto $(0, -3, 4)$.
**VECTOR POSICION**

21. Determinar los instantes en que la curva $f(t) = \left(2t^2, 1-t, 3+t^2\right)$ intersecta al plano $3x - 14y - z = 10$.

22. Dos partículas se mueven siguiendo las trayectorias dadas por $f(t) = \left(e^t, e^{2t}, 1-e^{-t}\right)$ y $g(t) = (1-t, \cos t, \sin t)$; determinar si las trayectorias se intersectan.

23. a) Una partícula viaja en el espacio de tal manera que su velocidad es $V(t) = (2, 5+6t, 0)$ y su posición en $t = 0$ es $(1, 0, 3)$. Encontrar su posición en $t = 1$. b) Repetir el problema a), donde $V(t) = \left(3t^2, -2t+7, \cos \pi t\right)$ y la posición en $t = 0$ es $(1, 5, 0)$.

24. Una partícula está viajando en una curva en el espacio exterior de tal manera que su posición en el tiempo $t$ está dada por $f(t) = \left(1+t, t^2, -2t\right)$. Pero en el tiempo $t = 2$ la partícula deja la curva y se mueve en la línea tangente con velocidad constante. Dónde está la partícul en $t = 4$?.
**LONGITUD DE CURVA**

25. Encontrar la longitud de una vuelta de la hélida $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

26. Calcular la longitud de $f(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 3t)$ entre $t = 1$ y $t = 3$.

27. Calcular la longitud de $f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ desde $(0, 0)$ hasta $(2\pi, 0)$.

28. Calcular la longitud de $f(t) = \left(t, 2t, t^2\right)$ desde el punto $(1, 2, 1)$ hasta el punto $(3, 6, 9)$.

29. Calcular la longitud de la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (Sugerencia: Parametrizar la curva).

30. a) Obtener la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(r'\right)^2 + r^2} d\theta$$

que da la longitud de arco desde $\theta = a$ hasta $\theta = b$ de una curva expresada en coordenadas polares.
b) Calcular la longitud de la circunferencia de radio 1.

31. Dos puntos $A$ y $B$ de un círculo unidad de centro 0 determinan en él un sector circular $AOB$. Mostrar que la longitud de arco $AB$ es igual a dos veces el área del sector.

32. Establecer integrales para las longitudes de las curvas cuyas ecuaciones son:
a) $y = e^x$ $\quad 0 \leq x \leq 1$.
b) $f(t) = (t + \ln t, t - \ln t)$ $\quad 1 \leq t \leq e$. Probar que la segunda longitud es el producto de la primera por $\sqrt{2}$.
**CURVATURA, NORMAL PRINCIPAL**

33. Dada la curva $f(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4t)$ encontrar $T$, $N$, $k$ en cualquier punto.

34. Dada la curva $f(t) = \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right)$ encontrar la ecuación del plano osculador cuando $t = 1$.

35. Encontrar la ecuación del círculo osculador de $f(t) = \left(t, t^2\right)$ en el punto $(0, 0)$.

36. Encontrar el radio de curvatura de $f(t) = (t, \ln t)$. Determinar el punto donde el radio de curvatura es mínima.

37. Si una curva plana tiene la ecuación cartesiana $y = f(x)$; mostrar que la curvatura en el punto $(x, f(x))$ es
$$k = \frac{|f''(x)|}{\left(1 + f'(x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

38. Aplicando la fórmula anterior (ejercicio 39) calcular la curvatura de $y = x^2 - 2x$ en cualquier punto.

39. Mostrar que la hélice $f(t) = (a\cos\omega t, a\sin\omega t, b\omega t)$ tiene curvatura constante
$$k = \frac{a}{a^2 + b^2}$$
**PROBLEMAS VARIOS**

40. Determinar todos los puntos en que la curva dada tiene un vector tangente horizontal o vertical, a) $f(t) = \left(t^3, t^2 + 2t\right)$, b) $f(t) = \left(t^4 - 4t, t^3\right)$, c) $f(t) = (\cos 2t, \cos 2t \cdot \tan t)$ con $-\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.

41. Dada la curva $f(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$, mostrar que el ángulo formado por $f(t)$ y $f(t)$ es constante (es decir, independiente de $t$).

42. Mostrar que las curvas $x = 2 - t$, $y = -\frac{1}{t}$, $z = 2t^2$; $x = 1 + t$, $y = \sin t - 1$, $z = 2\cos t$; se cortan en ángulo recto en $(1, -1, 2)$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

43. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 5$, $3x - 2y - z = 0$ en $(1, 1, 1)$.

44. $9x^2 + 4y^2 - 36z = 0$, $3x + y + z - z^2 - 1 = 0$ en $(2, -3, 2)$.

45. $4z^2 = xy$, $x^2 + y^2 = 8z$ en $(2, 2, 1)$.

46. Una recta perpendicular a la recta tangente a una curva plana se llama recta normal. Si en cada punto de una cierta curva plana $C$ se trazan la normal y una recta vertical, estas dos rectas interceptan sobre el eje $X$ un segmento de longitud 2. Hallar la ecuación cartesiana de esa curva si pasa por el punto $(1, 2)$. Son posibles dos soluciones.

47. Un punto se mueve en el espacio siguiendo la curva

$$f(t) = (4\cos t, 4\sin t, 4\cos t)$$

a) Mostrar que la trayectoria es una elipse y hallar la ecuación del plano que contiene dicha elipse. b) Mostrar que el radio de curvatura es $\rho(t) = 2\sqrt{2}\left(1 + \sin^2 t\right)$.

48. Cuatro arañas están en el suelo de una habitación cuadrada, una en cada esquina. Comienzan a moverse simultáneamente a la misma velocidad, cada una moviéndose hacia la araña de su derecha, la cual también se está moviendo de la misma manera. Encontrar el camino que sigue cada araña suponiendo que cada pared tiene 10 metros de largo.

49. En el problema anterior, las arañas se encuentran eventualmente en el centro de la habitación. Calcular la distancia total recorrida por cada araña.

# Chapter 4

# FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En este capítulo principalmente se estudia la derivada de una función de varias variables. Primeramente se realiza un repaso de la terminología de funciones en general y se introducen algunos términos referentes a las funciones de varias variables en particular. Con esto se define la derivada de una función de $R^n$ en $R^m$, de tal manera que la derivada de una función de una sola variable y la derivada de una curva resultan ser casos particulares. Se hace un amplio tratamiento de la Regla de la Cadena para derivar funciones compuestas, acompañando en cada caso con diagramas aclaratorios. También se tratan las derivadas de funciones implícitas y funciones inversas.

## 4.1 FUNCIONES DE $R^n$ EN $R^m$

Se designa por $R^n$ al conjunto de n-uplas $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Una función $f$ de $R^n$ en $R^m$ asigna a cada vector $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $R^n$ uno y solo un vector $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ de $R^m$. Se escribe también $f : R^n \longrightarrow R^m$.

El dominio de $f$ es $R^n$, mientras que su codominio es $R^m$; las variables del dominio (es decir $x_1, \cdots, x_n$) se llaman variables independientes y las variables del codominio (es decir $y_1, \cdots, y_m$) se llaman variables dependientes.

**Example 25** *La regla que asigna a cada número real $x$ su cuadrado $x^2$ es una función de una sola variable (Fig. 4.1). Se simboliza por*

$$f(x) = x^2 \text{ o } y = x^2$$

**Example 26** *La regla que a cada vector $(x, y)$ de $R^2$ le asigna la diferencia de los cuadrados de sus componentes, es una función de dos variables (figura ###). Escribimos*

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \text{ o } z = x^2 - y^2$$

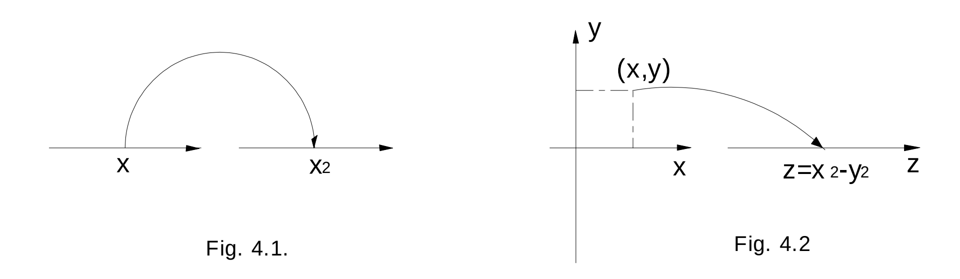


Fig. 4.1.

Fig. 4.2

**Example 27** *La regla que a cada* $(x, y)$ *de* $R^2$ *le asigna el par* $(x + y, x - y)$ *también de* $R^2$*, es una función de* $R^2$ *en* $R^2$ *(figura ###). Escribimos* $f(x, y) = (x + y, x - y)$*. Llamando* $u$*,* $v$ *a las variables dependientes escribimos.*

$$(u, v) = (x + y, x - y) \text{ ó } u = x + y,\ v = x - y$$

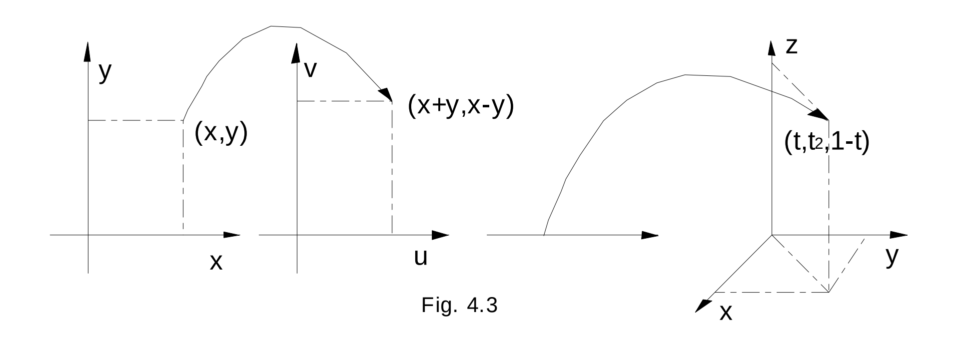


Fig. 4.3

**Example 28** *La regla que a cada número real* $t$ *le asigna el vector* $\left(t, t^2, 1 - t\right)$ *de* $R^3$ *es una función de* $R$ *en* $R^3$ *(figura ###). Escribimos* $f(t) = \left(t, t^2, 1 - t\right)$*. Llamando* $x$*,* $y$*,* $z$ *a las variables dependientes tenemos*

$$(x, y, z) = \left(t, t^2, 1 - t\right)$$

*de donde*

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 \\ z &= 1 - t \end{aligned}$$

**Example 29** $f(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$ *es una función de* $R^2$ *- sin el* $(0, 0)$*- en* $R^2$*.*

En general, una regla cualquiera define una función, sin tomar en cuenta los elementos que no tienen imágen y restringiendo la regla de modo que a cada elemento del dominio le corresponda una sola imágen. Por ejemplo, la regla $f(x,y) = \sqrt{x-y}$ es una función restringiendo el dominio al subconjunto de $R^2$ donde $x - y \geq 0$ (pues si $x - y < 0$, el elemento $(x, y)$ no tendría imágen). Por conveniencia, decimos que $f(x,y) = \sqrt{x-y}$ es una función de $R^2$ en $R$, sobreentendiendo que el dominio es el mayor subconjunto de $R^2$ donde la regla tiene sentido.

## 4.2 COMPOSICION DE FUNCIONES

La composición de funciones $f$ y $g$, cuando $f(x)$ está en el dominio de $g$, se define por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

(es decir, toma la imágen por $g$, de la imágen de $x$ por $f$).

Notemos que si $f$ es de $R^n$ en $R^s$ y $g$ de $R^s$ en $R^m$; la composición $g \circ f$ es de $R^n$ en $R^m$. Es decir

$$f : R^n \longrightarrow R^s,\ g : R^s \longrightarrow R^m \Longrightarrow g \circ f : R^n \longrightarrow R^m$$

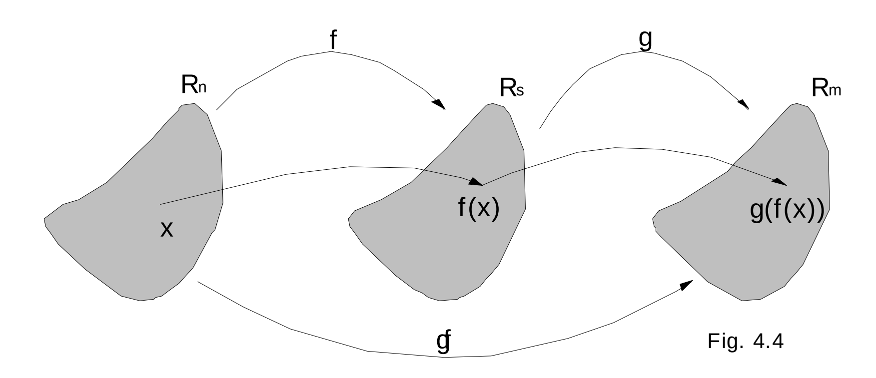


Fig. 4.4

**Example 30** *Si* $f(t) = (t, t^2, t^3)$ *y* $g(x,y,z) = xy + z$, *entonces la composición de* $f$ *y* $g$ *-en ese orden- es*

$$(g \circ f)(t) = g(f(t)) = g(t, t^2, t^3) = (t)(t^2) + (t^3) = 2t^3 \quad \textit{(ver figura \#\#\#)}$$

**Example 31** *Si* $f(x,y) = x + y$ *y* $g(x) = (x, x^2)$, *la composición de* $f$ *y* $g$ *-en ese orden- es*

$$(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = g(x+y) = \left(x+y, (x+y)^2\right) \quad \textit{(ver figura \#\#\#)}$$

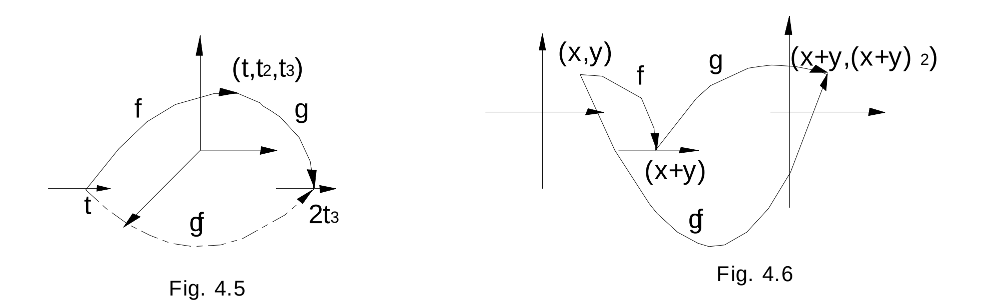


Fig. 4.5

Fig. 4.6

## 4.3 LIMITE Y CONTINUIDAD

Los conceptos de límite y continuidad para funciones de una sola variable tratados en el Cálculo I se generaliza de una manera natural a funciones de varias variables.

En el Cálculo I, cuando a medida que $x$ se aproxima a $a$, las imágenes $f(x)$ se aproxima a $L$, se dice que el límite de $f$ cuando $x$ tiende a $a$ es $L$ y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

### 4.3.1 Definición de Límite

La definición de límite para funciones de varias variables se expresa así:

Con $f : R^n \longrightarrow R^m$ (función de $R^n$ en $R^m$), si a medida que $x$ (vector de $R^n$) se aproxima a $a$ (vector de $R^n$), -es decir, si $|x - a|$ es cada vez más pequeño- las imágenes $f(x)$ (vectores de $R^m$) se aproxima a $L$ (vector de $R^m$) -es decir, si $|f(x) - L|$ se hace cada vez más pequeño- se dice que el limite de $f$ en $a$ es $L$ y se simboliza por

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Para el caso particular de funciones de $R^m$ en $R^n$ (curvas, estudiadas en el capítulo anterior) el límite se calcula fácilmente por

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) \\ &= \lim_{x \to a} f_1(x), \lim_{x \to a} f_2(x), \cdots, \lim_{x \to a} f_n(x) \end{aligned}$$

**Example 32** *Si* $f(x) = \left(x^2 - 2x, 3x - 1\right)$, *entonces*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} f(x) &= \left(\lim_{x \to 1} x^2 - 2x, \lim_{x \to 1} 3x - 1\right) \\ &= (1 - 2, 3 - 1) = (-1, 2) \end{aligned}$$

*En general, para funciones de varias variables, esto se cumple. Por ejemplo, si* $f(x,y) = \left(x^2 - y, xy - y^2\right)$*, entonces*

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \left(x^2 - y, xy - y^2\right) \\ &= \left(1^2 - 2, 1 \cdot 2 - 2^2\right) = (-1,-2) \end{aligned}$$

*Esto significa que a medida que* $(x,y)$ *se aproxima a* $(1,2)$*, las imágenes* $f(x,y)$ *se aproxima a* $(-1,-2)$*.*

### 4.3.2 Definición de continuidad

La definición de continuidad para funciones de varias variables es similar a la definición para funciones de una sola variable.

Se dice que $f : R^n \longrightarrow R^m$ es continua en $a$ (vector de $R^n$) si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Si $f$ es continua en cada punto de un conjunto, se dice que $f$ es continua en dicho conjunto.

**Example 33** *Como para* $f(x,y) = \left(x^2 - 2x, 3x - 1\right)$ *se tiene* $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = (-1,-2)$ *y además,* $f(1,2) = (-1,-2)$*; entonces* $f$ *es continua en* $(1,2)$*. En general se tiene que si*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

*para todo* $(a,b)$ *de* $R^2$*, entonces* $f$ *es continua en todo el plano* $R^2$ *y recíprocamente*

## 4.4 DERIVADA DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Las derivadas de funciones de una sola variable como las estudiadas en el Cálculo I y en el capítulo anterior, se generalizan para funciones de varias variables de la siguiente manera:

### 4.4.1 Definición

Si $f : R^n \longrightarrow R^m$ (función de $R^n$ en $R^m$), se dice que $f$ es derivable en $X$ -vector de $R^n$- si hay una matriz $A$ tal que

$$\begin{aligned} &f(X+H) = f(X) + AH + r(H)H \quad \text{y} \\ &\lim_{H\to 0} r(H) = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

La matriz $A$, de orden $m \times n$, se llama la derivada de $f$ en $X$ y también se simboliza por $f-(X)$ ó $Df(X)$. El resto $r(H)$ es también una matriz $m \times n$.

**Example 34** *Si $f(x) = x^2$, evaluando en $x+h$ tenemos*

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (x+h)^2 \\ &= x^2 + 2xh + h^2 = x^2 + 2xh + hh \\ &= f(x) + 2xh + r(h)h \end{aligned}$$

*con $f(x) = x^2$, $r(h) = h$ por comparación con (1) y con*

$$\lim_{h\to 0} r(h) = \lim_{h\to 0} h = 0$$

*entonces, por comparación con (1), tenemos que la derivada de $f$ en $x$ es*

$$A = 2x \text{ o } f'(x) = 2x$$

*(notemos que $A = 2x$ es una matriz $1\times 1$).*

**Notación**. De la expresión $f(X+H) = f(X) + AH + r(H)H$ se ve que los vectores de $R^n$ (dominio de $f$) deben escribirse como vectores columna $n\times 1$ y los vectores de $R^m$ (codominio de $f$) deben escribirse como vectores columna $m\times j$. Esto se hará siempre que se determine la derivada $A$ de $f$ según la definición. Así, $(x,y)$ se escribirá como $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

**Example 35** *Según la definición, hallar la derivada de $f(x,y) = 3x - y^2$. Como $f$ es una función de $R^2$ en $R$, su derivada es una matriz $1\times 2$, entonces conviene escribir a $(x,y)$ como vector columna $2\times 1$, es decir como $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Evaluando $f$ en $\begin{pmatrix} x+h \\ y+k \end{pmatrix}$ tenemos*

$$f\begin{pmatrix} x+h \\ y+k \end{pmatrix} = 3(x+h) - (y+k)^2 = 3x + 3h - y^2 + 2yk + k^2$$

*expresando en la forma (4.1)*

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x+h \\ y+k \end{pmatrix} &= 3x - y^2 + 3h - 2yk - kk \\ &= 3x - y^2 + (3,-2y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (0,-k)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (3,-2y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + r(h,k)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

*(con $r(h,k) = (0,-k)$) y como*

$$\lim_{H\to 0} r(H) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} r(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} (0,-k) = (0,0)$$

*Entonces, comparando con (4.1), la derivada de $f$ es*

$$f'(x,y) = (2,-2y)$$

*En particular, la derivada de $f$ en $(1,1)$ es*

$$f'(1,1) = (3,-2)$$

## 4.5 DERIVADAS PARCIALES

Si $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es una función de $R^n$ en $R$, entonces la variable $z$ depende de las variable independientes $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Al límite, cuando existe,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \cdots, x_i + h, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)}{h}$$

se llama derivada parcial de $z$ con respecto a $x_i$ y se simboliza por $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ ó $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. Es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \cdots, x_i + h, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)}{h} \tag{4.2}$$

Como se ve, esta derivada parcial es el límite de la función incrementada en $x_i$, menos la función sin incrementar, sobre el incremento y cuando el incremento tiende a cero. Esta derivada parcial da aproximadamente la relación que hay entre una pequeña variación $h$ en la dirección de $x_i$ y la variación que esto produce en las imágenes al variar $f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ hasta $f(x_1, \cdots, x_i + h, \cdots, x_n)$.

De la definición (4.2) se ve que la derivada parcial con respecto a $x_i$ es la derivada ordinaria con respecto a $x_i$, manteniendo a las demás variables como constante.

**Example 36** *Hallar* $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ *si* $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 1$.
*Derivando con respecto a $x$, manteniendo $y$ constante, tenemos*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 3y$$

*y derivando con respecto a $y$, manteniendo $x$ constante, tenemos*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3x$$

## 4.6 DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Como una derivada parcial es otra vez una función de varias variables, podemos derivarla nuevamente y así obtenemos la segunda derivada parcial; así sucesivamente se obtienen las terceras derivadas parciales, etc. Estas derivadas parciales se simbolizan por

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \text{ etc.}$$

**Example 37** *Hallar todas las segundas derivadas parciales de* $f(x,y) = xy^3 + \sin x$.
*Como*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^3 + \cos x \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x \ ; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3y^2$$

*y como*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xy \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3y^2$$

*En este último ejemplo se a obtenido* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, *es decir las derivadas cruzadas son iguales. Esto siempre ocurre cuando una de ellas (y por tanto, también la otra derivada cruzada) es continua.*

**Notación**. Si $f$ depende sólo de $x$ se escribe $\frac{df}{dx}$, mientras que si $f$ depende además de otras variables se escribe $\frac{\partial f}{\partial x}$, para representar la derivada de $f$ con respecto a $x$.

El **cálculo de la derivada de una función de varias variables**, se simplifica enormemente en la mayor parte de los casos. Cuando todas las primeras derivadas parciales son continuas, la derivada de una función $f : R^n \longrightarrow R^m$ (función de $R^n$ en $R^m$) es una matriz $m \times n$ cuya iésima fila está constituida por las derivadas parciales de la iésima variable dependiente con respecto a cada una de las variables independientes. (Ver ejercicio 43).

Así, $f(x,y) = (u,v)$ (función de $R^2$ en $R^2$, su derivada es una matriz $2 \times 2$).

entonces

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}$$

donde

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ etc.}$$

Si $f(x,y) = (u,v,w)$ (función de $R^2$ en $R^3$, su derivada es una matriz $3 \times 2$), entonces

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{bmatrix}$$

Si $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ (función de $R^n$ en $R$, su derivada es una matriz $1 \times n$), entonces

$$z' = \left( \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right) \tag{4.3}$$

En particular la derivada (4.3), derivada de una función de $R^n$ en $R$, se llama también **gradiente** de la función. En general, a la derivada de una funcion $f$ de $R^n$ en $R^m$ se la llama también **matriz jacobiana** de $f$.

**Example 38** *Calcular el gradiente de* $z = x^2 - xy^2$*.*
*Su gradiente es*

$$z' = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(2x - y^2, -2xy\right)$$

**Example 39** *Calcular la derivada de* $f(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$*.*
*Su derivada es*

$$f'(x, y) = \left(\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{bmatrix}$$

*(con* $f(x, y) = (x \cos y, x \sin y) = (u, v)$*; es decir* $u = x \cos y$*,* $v = x \sin y$*).*

El **Hessiano** de una función $f : R^n \longrightarrow R$ es la segunda derivada de $f$. Notemos que la primera derivada es una función de $R^n$ en $R^n$ dada por

$$f'(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (f_{x_1}, f_{x_2}, \cdots, f_{x_n})$$

Por tanto, la segunda derivada, es decir; el Hessiano de $f$, es una matriz $n \times n$ y está dada por

$$f''(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

Notemos que la fila iésima del Hessiano está constituida por las derivadas parciales de la iésima componente de la primera derivada con respecto a cada una de las variables independientes.

Frecuentemente, el Hessiano de $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ también se simboliza por $H(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

**Example 40** *Calcular el Hessiano de* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 z^2$*.*
*Como la primera derivada es*

$$f'(x, y, z) = \left(2x, 2yz^2, 2y^2 z\right)$$

*El Hessiano de* $f$ *es*

$$H(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2z^2 & 4yz \\ 0 & 4yz & 2y^2 \end{bmatrix}$$

## 4.7 REGLA DE LA CADENA

La Regla de la Cadena permite expresar la derivada de una función compuesta en términos de las derivadas de sus funciones componentes.

Si $f$ es una función de $R^n$ en $R^m$ y $g$ una función de $R^m$ en $R^s$ se puede componer $f$ con $g$ y obtener una función $g \circ f$ de $R^n$ en $R^s$; es decir

$$f : R^n \longrightarrow R^m \ , \ g : R^m \longrightarrow R^s$$

entonces

$$g \circ f : R^n \longrightarrow R^s$$

En estas condiciones:

La derivada de $g \circ f$ en el punto $X$ (matriz $s \times n$) es igual al producto matricial de la derivada de $g$ en $f(X)$ (matriz $s \times m$) por la derivada de $f$ en $X$ (matriz $m \times n$). Es decir

$$(g \circ f)'(X) = g'(f(X))\, f'(X)$$

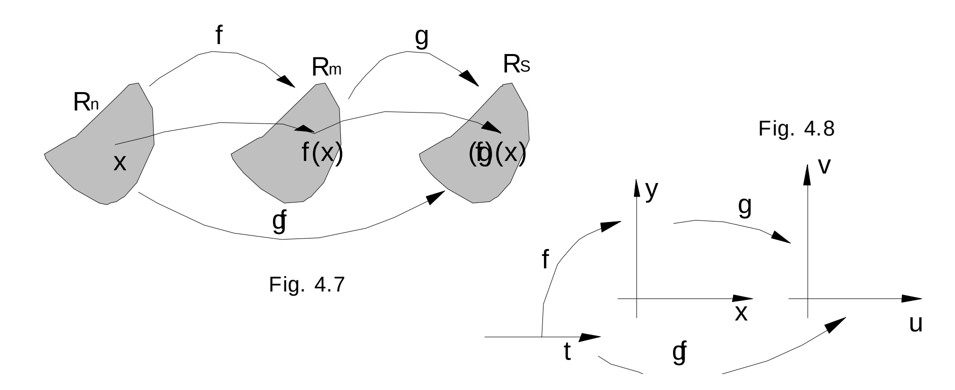



Fig. 4.7

Fig. 4.8

**Example 41** *Si* $f(t) = (x(t), y(t))$ *y* $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$.
*Por una parte*

$$(g \circ f)'(t) = \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix}$$

*Por otra parte*

$$g'(x,y) \circ f'(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}$$

*Aplicando la Regla de la Cadena tenemos:*

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} & \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} & \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} \end{bmatrix}$$

*Igualando componentes obtenemos fórmulas sumamente útiles para* $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} \quad , \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

## 4.8 DERIVADA DE FUNCIONES IMPLICITAS

En general, haciendo las restriciones debidas, un sistema de ecuaciones define una función implícitamente.

**Example 42** *Dado el sistema*

$$\begin{aligned} u + v - z + 3x^2 - y + 10 &= 0 \\ 2uv - z^2 + xy + &= 0 \end{aligned}$$

*En este sistema de dos ecuaciones existen cinco variables. Notemos que dando valores a tres de las variables (digamos $x$, $y$, $z$) se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ($u$, $v$ en este caso), resolviendo el sistema se obtienen los valores de $u$, $v$ correspondientes a los valores asignados a $x$, $y$, $z$. Luego, el anterior sistem se puede considerar como función de $R^3$ en $R^2$ que a cada $(x, y, z)$ de $R^3$ le asigna un $(u, v)$ de $R^2$.*

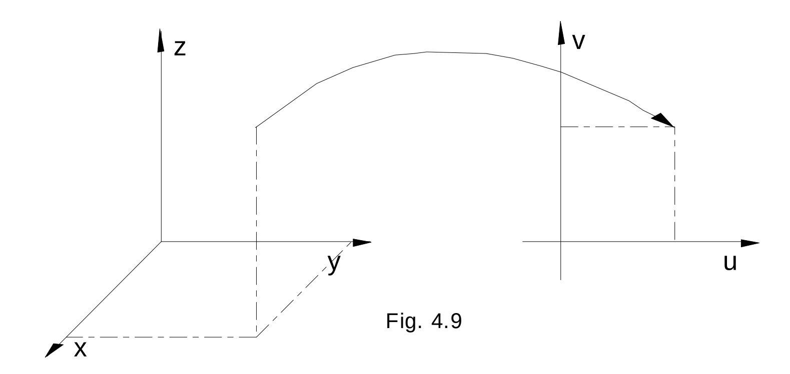


Fig. 4.9

Para derivar una función implícita (que puede estar definida por un sistema de ecuciones) no es necesarias las variables dependientes en términos de las independientes. Esto se muestra en el siguiente ejemplo:

**Example 43** *Si*

$$\begin{aligned} &u + v - z + 3x^2 - v + 10 = 0 \\ &2uv - z^2 + xy + 3 = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

*Calcular la derivada de la función implícita definida por este sistema, considerando a $x$, $y$, $z$ como variables independientes y a $u$, $v$ como variables dependientes.*
*La derivada es la matriz $2 \times 3$:*

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \qquad (2)$$

*Para calcular esta matriz procedemos de la siguiente manera: Derivando cada una de las ecuaciones del sistema (1) con respecto a $x$ y teniendo en cuenta que*

*$u$, $v$ son variables dependientes de $x$:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}+6x &= 0 \\ 2v\frac{\partial u}{\partial x}+2u\frac{\partial v}{\partial y}+y &= 0 \end{aligned}$$

*Resolviendo por el método de Cramer (o método de los determinantes) se tiene:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\begin{vmatrix} -6x & 1 \\ -y & 2u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2v & 2u \end{vmatrix}} = \frac{-12xu+y}{2u-2v} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -6x \\ 2v & -y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2v & 2u \end{vmatrix}} = \frac{-y+12xv}{2u-2v} \end{aligned}$$

*Derivando cada una de las ecuaciones del sistema (1) con respecto a $y$, y resolviendo para $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$ se obtiene*

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2u+x}{2u-2v} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-2x-2v}{2u-2v}$$

*Finalmente, derivando el sistema (1) con respecto a $z$, y resolviendo para $\frac{\partial u}{\partial z}$ y $\frac{\partial v}{\partial z}$ se obtiene*

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2u+2z}{2u-2v}=\frac{u+z}{u-v} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{-2z+2v}{2u-2v}=\frac{-z+v}{u-v}$$

*Reemplazando los valores obtenidos en la matriz dada por (2) se obtiene la derivada de la función implícita definida por el sistema de ecuaciones (1).*

## 4.9 DERIVADA DE FUNCIONES INVERSAS

Si $f$ es una función de $R^n$ en $R^m$, haciendo las restricciones necesarias, en general existe su función inversa $f^{-1}$ (es decir, si $f(x)=y$, entonces $f^{-1}=x$).

La derivada de $f$ (función de $R^n$ en $R^n$) es una matriz cuadrada $n\times n$ y la derivada de la función inversa $f^{-1}$ es también una matriz $n\times n$; más aun, es la matriz inversa de la matriz derivada de $f$.

Es decir,

$$Df^{-1}(y)=(Df(x))^{-1} \quad \text{con} \quad f(x)=y$$

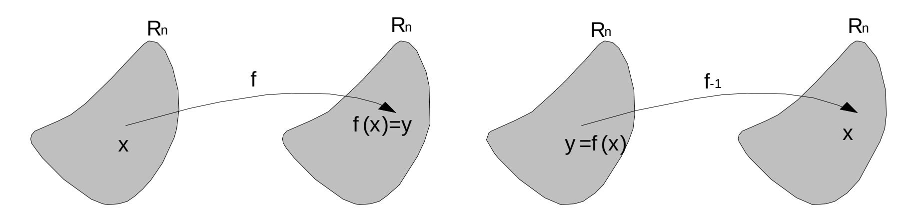



Fig. 4.10

**Example 44** *Si* $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$*; o lo que es lo mismo,* $x = r\cos\theta$*,* $y = r\sin\theta$*; calcular* $Df^{-1}$*. Como*

$$Df(r,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix},$$

*entonces tomando la inversa de esta matriz, se obtiene*

$$Df^{-1}(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

*donde, por supuesto*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

## 4.10 TEOREMA DEL VALOR MEDIO

El Teorema del Valor Medio para funciones de una variable, se generaliza a funciones de dos variables de la siguiente manera:

### 4.10.1 Teorema del valor medio

Si $f(x,y)$ es continua en una región errada (es decir, que contiene a su contorno) y si las primeras derivadas parciales existen en la región abierta (es decir, excluídos los puntos del contorno) se tiene:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = hf_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + kf_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$

con

$$0 < \theta < 1.$$

Notemos que $(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$ es un punto que está en la línea que une $(x_0,y_0)$ con $(x_0+h, y_0+k)$.

El teorema de Taylor para funciones de una variable también se extiende a funciones de más variables. En particular, tenemos:

### 4.10.2 Teorema de Taylor

Si todas las primeras n-ésimas derivadas parciales de $f(x, y)$ son continuas en una región cerrada y si las $(n+1)$-ésimas derivadas parciales existen en la región abierta, se tiene:

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0, y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + R_n \end{aligned}$$

donde el resto $R_n$ está dado por

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k),\ 0 < \theta < ????$$

donde, además, se ha usado la notación operacional

$$\begin{aligned} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) &= h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) \\ \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) &= \left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x_0, y_0) \\ &= h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f_{yx}(x_0, y_0) + k^2 f_{yy}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

En general $\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$ se desarrolla formalmente según el teorema del binomio. Ver ejercicio 41.

## 4.11 DIFERENCIAL DE UNA FUNCION

La diferencial de una función de varias variables, de $R^n$ en $R$, es una generalización del mismo concepto que se tiene para funciones de una sola variable. Por ejemplo, si $z = z(x, y)$, entonces

$$\Delta z = z(x+h, y+k) - z(x, y) \qquad (1)$$

se llama **incremento** de $z$. Si la funcion $z = z(x, y)$ tiene derivada, entonces su derivada es $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ y además:

$$z(x+h, y+k) - z(x, y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (r_1, r_2)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \qquad (2)$$

donde $(r_1, r_2)$ es el resto que tiende a cero cuando $(h, k)$ tiende a $(0, 0)$. Es decir, multiplicando en (2)

$$z(x+h, y+k) - z(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}h + \frac{\partial z}{\partial y}k + r_1 h + r_2 k \qquad (3)$$

A la suma de los dos primeros términos del segundo miembro de (3) se llama diferencial de $z$ y se representa por $dz$; además, también suele escribirse $dx$ en lugar de $h$ y $dy$ en lugar de $k$. Es decir:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (4)$$

La diferencial de $z$ tiene una interesante propiedad: Del hecho de que $r_1 h, r_2 k$ tiende a cero cuando $(h, k)$ tiende a $(0, 0)$ se ve que cuando $h = dx$, $k = dy$ son pequeños, los valores del incremento $\Delta z$ y la diferencial $dz$ son aproximadamente iguales.

La diferencial para funciones de más variables se generaliza fácilmente. Así, por ejemplo, si $w = w(x, y, z)$, entonces

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

**Example 45** *Si* $z = x^2 + xy + y^2$*; entonces*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (2x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy$$

**Example 46** *Si en un rectángulo de base 5 y altura 2, se aumenta su base en 0.1 y la altura en 0.2; el área aumenta aproximadamente en (siendo* $A = bh$*)*

$$dA = \frac{\partial A}{\partial b}db + \frac{\partial A}{\partial h}dh = hdb + bdh$$

*ya que los valores iniciales son* $b = 5,\ h = 2$

$$dA = 2db + 5dh$$

*Como* $db = 0.1$ *y* $dh = 0.2$*; se tiene*

$$dA = 2\,(0.1) + 5\,(0.2) = 1.2$$

*(El aumento exacto del área está dado por*

$$A\,(5.1, 2.2) - A\,(5, 2) = 11.2 - 10 = 1.22$$

## 4.12 EJERCICIOS RESUELTOS

### FUNCIONES, IMAGENES, COMPOSICION

1. Si $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$, hallar a) $f(1, -1)$, b) $f(a + b, a - b)$.
   Solución. a) Como f($x, y$) $= x^2 - y^2 + 2xy$, entonces $f(1, -1) = 1 - 1 + 2 = 2$.
   b) $f(a + b, a - b) = (a + b)^2 - (a - b)^2 + 2\,(a + b)\,(a - b) = 4ab + 2a^2 - 2b^2$.

2. $f(x,y) = (x+y, xy)$, hallar a) $f(2,-2)$ b) la imagen de la recta $x = 2$.
Solución. Como $f(x,y) = (x+y, xy)$, entonces $f(2,-2) = (2+(-2), 2(-2)) = (0,-4)$.
b) Un punto cualquiera de la recta $x = 2$ es $(2, y)$, la imagen de este punto es $f(2,y) = (2+y, 2y)$. Llamando $u$, $v$ a las variables del dominio tenemos:

$$f(2,y) = (2+y, 2y) = (u,v) \Rightarrow u = 2+y \quad , \quad v = 2y$$

eliminando $y$ de las dos últimas ecuaciones obtenemos $v = 2u + 4$. Por tanto, la imagen de la recta $x = 2$ es la recta $v = 2u - 4$ (Fig. ###).

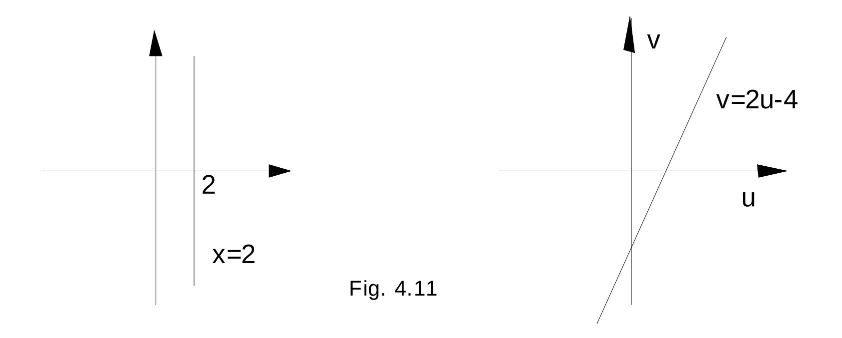


Fig. 4.11

3. Si $f(x,y) = (x, y-x)$, hallar la imagen del triángulo de vértice $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.

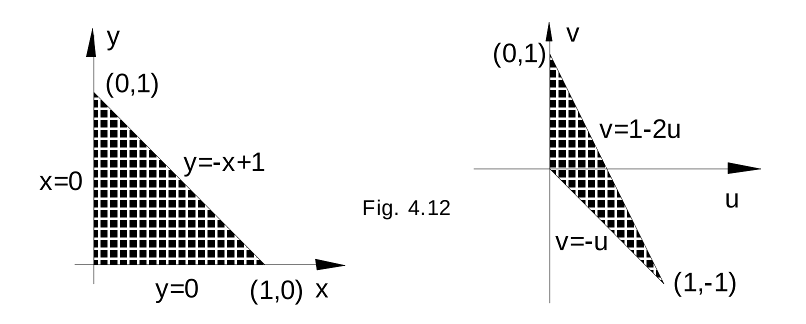


Fig. 4.12

Solución. Para tener una idea inicial de la imagen, hallemos la imagen de los vértices:

$$f(0,0) = (0,0) \quad ; \quad f(1,0) = (1,-1) \quad \text{y} \quad f(0,1) = (0,1)$$

Ahora, hallemos las imágenes de los lados del triángulo.
La imagen del lado $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$:

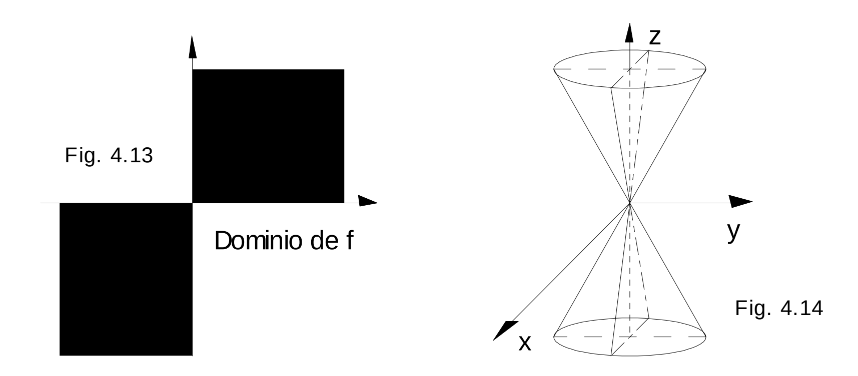
$$f(0,y) = (0,y) = (u,v)\,;$$

es decir $u = 0$ y $v = y$. Como $0 \leq y \leq 1$. La imagen es el segmento $u = 0$, $o \leq \leq v \leq 1$.
La imagen del lado $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$:

$$f(x, 0) = (x, -x) = (u, v);$$

es decir $u = x$, $v = 1 - 2x$. O sea, el segmento, $v = 1 - 2u$, $0 \leq u \leq 1$. Entonces, la imagen del triángulo dado es otro triángulo, cuyos lados y vértices se han determinado (figura ###).

4. Indicar gráficamente el dominio de la función $f(x, y) = \frac{1}{y}\sqrt{xy}$.




Solución. El dominio de $f$ está formado por los pares $(x, y)$ para los que tiene sentido la expresión. $\frac{1}{y}\sqrt{xy}$; y esto ocurre si $y \neq 0$, $xy \geq 0$, es decir $x \geq 0$ y $y > 0$ ó $x \leq 0$ y $y < 0$.
La gráfica del dominio se muestra en la figura ### (parte sombreada).

5. Indicar gráficamente el dominio de $f(x, y, z,) = \ln\left(z^2 - x^2 - y^2\right)$.
Solución. El dominio de $f$ está formado por los puntos $(x, y, z)$ del espacio para los que existe $\ln\left(z^2 - x^2 - y^2\right)$; esto ocurre siempre que $z^2 - x^2 - y^2 > 0$ ó $z^2 > x^2 + y^2$.
Como $z^2 = x^2 + y^2$ representa a los puntos de un cono, entonces teniendo en cuenta que para $(0, 0, 1)$ -un punto interior del cono- se cumple la desigualdad $z^2 > x^2 + y^2$, deducimos que el dominio de la función es el interior de dicho cono (figura ###).

6. Hallar la preimágen del punto $(4, 3)$ según la función $f(x, y) = (xy, x - y)$.
Solución. La preimagen de $(4, 3)$ son aquellos pares $(x, y)$ tales que $f(x, y) = (4, 3)$ ó $(xy, x - y) = (4, 3)$ de donde $\begin{matrix} xy = 4 \\ x - y = 3 \end{matrix}$ y, resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4,\ y_1 = 1 \\ x_2 &= -1,\ y_2 = -4 \end{aligned}$$

Luego, la preimágen de $(4, 3)$ son los puntos $(4, 1)$ y $(-1, 4)$.

7. Si $f : R^2 \to R$, la curva de nivel correspondiente al valor $c$ es la preimagen de $c$ según la función dada; es decir aquellos puntos $(x, y)$ para los que $f(x, y) = c$. Graficar las curvas de nivel de la función $f(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$ correspondientes a los valores $c = 0, 1, -1, \frac{1}{2}$.
Solución. Si $c = 0$, entonces de $f(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2} = 0$ se tiene $x = 0$ en $(x, y) \neq (0, 0)$.
Si $c = 1$, de $f(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2} = 1$ se tiene $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ en $(x, y) \neq (0, 0)$.
Si $x = -1$, de $f(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2} = -1$ se tiene $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ en $(x, y) \neq (0, 0)$.
Si $c = \frac{1}{2}$, de $f(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{2}$ se tiene $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ en $(x, y) \neq (0, 0)$.
Es decir, la preimagen de $c = 0$ es la recta $x = 0$ si el origen.
La preimagen de $c = 1$ es la circunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ si el origen, etc. Las preimágenes o curvas de nivel se muestran en la figura ###.

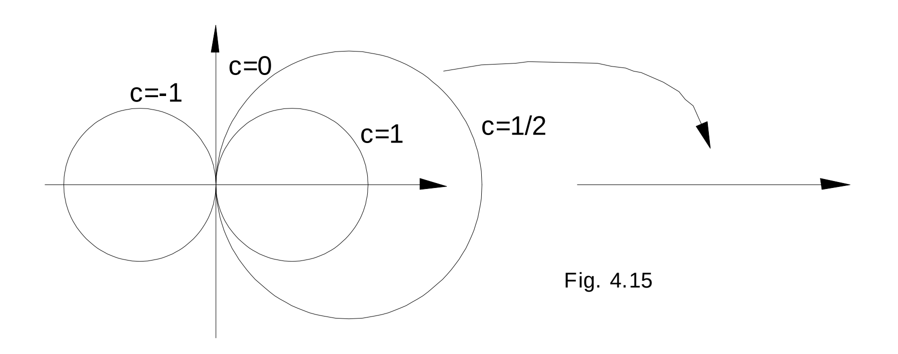


Fig. 4.15

8. Hallar, si es posible $g \circ f$: a) $f(x, y) = (x`y, 2x - y)$ , $g(x, y) = x + 3y - 1$.
b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ , $g(x) = \left(1 - x, x^2 + 1\right)$.
Solución. a) Como $f : R^2 \to R^2$ y $g : R^2 \to R$ entonces $g \circ f : R^2 \to R$ está dado por $g \circ f(x, y) = g(f(x, y)) = g(x + y, 2x - y) = x + y + 3(2x - y) - 1$ es decir; $g \circ f(x, y) = 7x - 2y - 1$.
b) Como $f : R^2 \to R$ y $g : R \to R^2$ entonces $g \circ f : R^2 \to R^2$ está dado por $g \circ f(x, y) = f(f(x, y)) = f\left(x^2 + y^2\right) = \left(1 - x^2 - y^2, \left(x^2 + y^2\right)^2 + 1\right)$.

**LIMITE Y CONTINUIDAD**

9. Hallar el límite de a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $(0, 0)$ b) $f(x, y) = \left(x^2 + y, x + y^2\right)$ en $(1, 2)$.
Solución. a) $\lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x, y) = \lim\limits_{(x,y)\to 0} \left(x^2 + y^2\right) = 0 + 0 = 0$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \left(x^2+y, x+y^2\right) = \left(1^2+2, 1+2^2\right) = (3,5)$.

10. Mostrar que $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$ no tiene límite en $(0,0)$.
Solución. Vamos a aproximarnos a $(0,0)$ por las rectas de la forma. $y = kx$. En estas condiciones:

$$f(x,y) = \frac{x}{x+kx} = \frac{1}{x+k} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x,y) = \frac{1}{1+k}$$

Esto dice que si a $(0,0)$ nos acercamos por la recta $y = kx$ ocurre que $f(x,y)$ se acerca a $\frac{1}{1+k}$. Y como este valor depende de $k$, el límite de $f(x,y)$ en $(0,0)$ no existe.

11. Si $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, determinar $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$. Qué puede decirse sobre $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x,y)$?
Solución. Calculando tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

Esto dice que si a $(0,0)$ primero nos acercamos verticalmente $(y \to 0)$ y después horizontalmente $(x \to 0)$, $f(x,y)$ se acerca a 1. Por otra parte, si a $(0,0)$ primero nos acercamos horizontalmente $(x \to 0)$ y luego verticalmente $(y \to 0)$, ocurre que $f(x,y)$ se acerca a -1. Por tanto, el límite de $f(x,y)$ en $(0,0)$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x,y)$; no existe.

12. Es continua en $(0,0)$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2} & ; \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Solución. Con $x = ky$, tenemos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{k^2y^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{k^2+1} = \frac{1}{k^2+1}$$

Por tanto, como $f(0,0) = 0 \neq \frac{1}{k^2+1} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x,y)$ con $x = ky$. Esto dice que la función no es continua en $(0,0)$.

**DERIVADA SEGUN LA DEFINICION**

13. Mostrar que si $f(x)$ es una función de $R$ en $R$, su derivada

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

es un caso particular de la definida por $f(x+h) = f(x) + Ah + r(h)h$, escribiendo:

$$A + r(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

y tomando límites cuando $h$ tiene a cero, tenemos:

$$A + \lim_{h\to 0} r(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

y como $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$, se obtiene:

$$A = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

14. Según la definición, hallar la derivada de: a) $f(x) = 2x^2 + 3x$ , b) $f(x,y) = 3y - xy + 3$.
Solución. Evaluando $f$ en $x+h$ tenemos

$$\begin{aligned} f(x+h) = 2(x+h)^2 + 3(x+h) &= 2x^2 + 4xh + 2h^2 + 3x + 3h \\ f(x+h) &= \left(2x^2 + 3x\right) + (4xh + 3h) + 2h^2 \\ f(x+h) &= f(x) + (4x+3)h + (2h)h \end{aligned}$$

comparando conla definición, tenemos $r(H) = 2h$. Como $\lim_{H\to 0} r(H) = \lim_{h\to 0} 2h = 0$ se tiene que la derivada de $f$ en $x$ es $A = 4x+3$ ó $f'(x) = 4x+3$.
b) Partimos de

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x+h \\ y+k \end{pmatrix} &= 3(y+k) - (x+h)(x+k) + 3 \text{ (evaluando en } x+h, y+k) \\ &= 3y + 3k - xy - xk - yh - hk + 3 \\ &= (3y - xy + 3) + (-y, -x+3)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (-k, 0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} x+h \\ y+k \end{pmatrix} &= f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-y, -x+3)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (-k, 0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

comparando con la definición tenemos $r(H) = (-k, 0)$. Como se tiene $\lim_{H\to 0} r(H) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} (-k, 0) = (0,0) \Rightarrow f'(x,y) = (-y, -x+3)$.
**Nota**. Recordemos que por conveniencia en la notación del cálculo de derivadas, a los vectores de $R^n$ los escribimos como vectores columna. También remarquemos que por ser $f$ una función de $R^2$ en $R$, su derivada es una matriz $1 \times 2$.

15. Según la definición, calcular la derivada de $f(x) = \left(x, x^2, 1 - 2x\right)$.
Solucion. Partimos de:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} x+h \\ (x+h)^2 \\ 1 - 2(x+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+h \\ x^2 + 2xh + h^2 \\ 1 - 2x - 2h \end{bmatrix}$$

(evaluando en $x+h$) y comparando con la definición tenemos $r(H) = \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{bmatrix}$ y como $\lim\limits_{H\to 0} r(H) = \lim\limits_{h\to 0} = \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; tenemos $f'(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \\ -2 \end{bmatrix}$.

**Nota**. Como $f$ es una función de $R$ en $R^3$, su derivada es una matriz $3 \times 1$.

16. Calcular, según la definición, la derivada de

$$f(x,y) = \left(x, y, x^2 + y^2\right)$$

Solución. Partimos de

$$f\begin{bmatrix} x+h \\ y+k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+h \\ y+k \\ (x+h)^2 + (y+k)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+h \\ y+k \\ x^2 + 2xh + h^2 + y^2 + 2yk + k^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ h & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

$$f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ h & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

y comparando con la definición tenemos: $r(H) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ h & k \end{bmatrix}$; y como $\lim\limits_{H\to 0} r(H) = \lim\limits_{h\to 0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ h & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se sigue que

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2 \end{bmatrix}$$

Notemos que como $f$ es una función de $R^2$ en $R^3$, su derivada es una matriz $3 \times 2$.

17. Calcular la derivada de $f(x,y) = (x\cos y, x\sin x)$.
Solución. Como $f$ es una función de $R^2$ en $R^2$, su derivada es una matriz $2 \times 2$. Entonces con

$$u = x\cos y \quad , \quad v = x\sin y;$$

tenemos

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{bmatrix}$$

18. Calcular la derivada de $f(x,y) = \left(x, y, x^2 + y^2\right)$.
Solución. Como $f$ es una función de $R^2$ en $R^3$, su derivada es una matriz $3 \times 2$. Entonces con $u = x,\ v = y,\ w = x^2 + y^2$, tenemos:

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$$

**REGLA DE LA CADENA**

19. Si $f(t) = (x(t), y(t))$ y $w = g(x,y)$ aplicando la regla de la cadena hallar una fórmula para $dw/dt$.

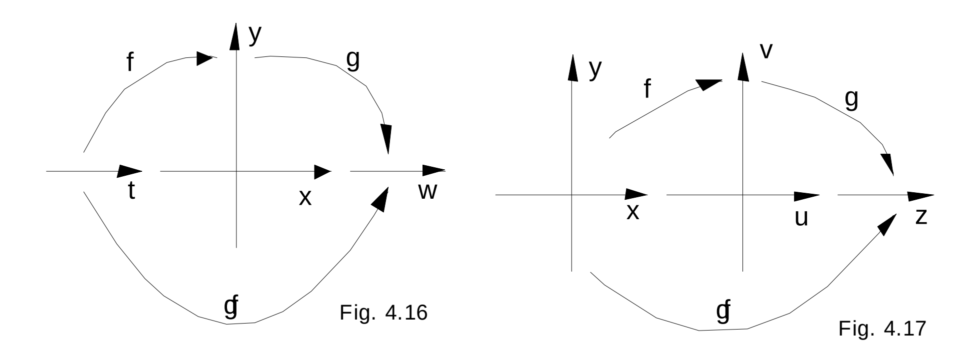


Fig. 4.16
Fig. 4.17

Solución. Antes que nada notemos que $f$ es función de $R$ en $R^2$ y que $g$ es una función de $R^2$ en $R$.
Ademas, $w$ depende de $(x,y)$ y a su vez $(x,y)$ depende de $t$. (ver diagrama 4.1).
Por una parte, como $g \circ f$ es función de $R$ en $R$, su derivada es

$$(g \circ f)' = \left(\frac{dw}{dt}\right)$$

Por otra parte, el producto de las derivadas de $g$ y $f$ es:

$$g' \cdot f' = \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right) \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial w}{dx}\frac{dx}{dt}, \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)$$

Aplicando la Regla de la Cadena, tenemos $(g \circ f)' = g' \circ f'$. Es decir

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

**Observación**. Notemos que la derivada de $w$ con respecto a $t$ se obtiene "pasando" por las variables intermedias $x$, $y$ de las cuales depende $w$, pero que a su vez depende de $t$.

20. Si $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ y $g(u,v) = z$, aplicando la Regla de la Cadena hallar fórmulas para

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$$

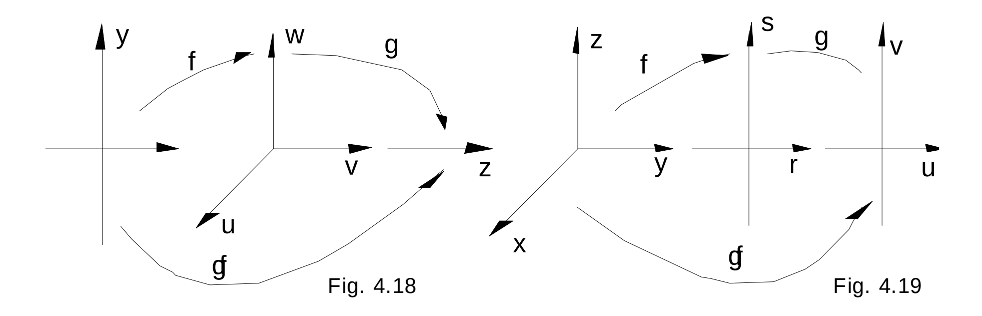


Fig. 4.18
Fig. 4.19

Solución. Primeramente notamos que $f$ es función de $R^2$ en $R^2$ y que g es función de $R^2$ en $R$. Además $z$ depende de $(u,v)$ que a su vez depende de $(x,y)$ (ver diagrama 4.2).
Del diagrama 4.2 tenemos:

$$(g \circ f)' = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ademas

$$g' \circ f' = \left(\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

o sea

$$g' \circ f' = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Aplicando la Regla de la Cadena tenemos $(g \circ f)' = g' \circ f'$. Es decir,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Igualando componentes obtenemos las fórmulas pedidas:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

**Observación**. Notemos que la derivada parcial de $z$ con respecto de $x$ se obtiene ”pasando” por cada una de las variables intermedias de las cuales depende $z$ y que a su vez depende de $x$. Similarmente se procede para calcular la derivada de $z$ con respecto a $y$.

21. Si $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y), w(x,y))$ y $g(u,v,w) = z$, aplicando la Regla de la Cadena hallar fórmulas para $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Solución. Primeramente notemos que $f$ es función de $R^2$ en $R^3$ y que $g$ es función de $R^3$ en $R$. Además, $z$ depende de $(u,v,w)$ que a su vez depende de $(x,y)$. (ver diagrama 4.3).
Del diagrama 4.3 tenemos

$$(g \circ f)' = \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

Por otra parte

$$g' \circ f' = \left[ \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w} \right] \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{bmatrix}$$

o

$$g' \circ f' = \left[ \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

Aplicando la Regla de la Cadena tenemos $(g \circ f)' = g' \circ f'$. Igualando componentes en $(g \circ f)' = g' \circ f'$ obtenemos las fórmulas pedidas:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left[ \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \right], \frac{\partial z}{\partial y} = \left[ \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

**Observación**. Notemos que la derivada de $z$ con respecto a $x$ se obtiene "pasando" por cada una de las variables intermedias $u, v, w$ de las cuales depende $z$ y que a su vez depende de $x$. De la misma manera se obtiene la derivada de $z$ con respecto a $y$.

22. Si $f(x,y,z) = (r,s)$ y $g(r,s) = (u,v)$, aplicando la Regla de la Cadena hallar fórmulas para

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}. \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}$$

Solución. Antes que nada notemos que $f$ es función de $R^3$ en $R^2$ y $g$ es función de $R^2$ en $R^2$. Ademas $(u,v)$ depende de $(r,s)$ que a su vez depende de $(x,y,z)$. (ver diagrama 4.4).
Del diagrama 4.4 tenemos

$$(g \circ f)' = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}$$

y por otra parte,

$$g' \circ f' = \begin{bmatrix} u_r & u_s \\ v_r & v_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x & r_y & r_z \\ s_x & s_y & s_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_r r_x + u_s s_x & u_r r_y + u_s s_y & u_r r_z + u_s s_z \\ v_r r_x + v_s s_x & v_r r_y + v_s s_y & v_r r_z + v_s s_z \end{bmatrix}$$

Igualando componentes en $(g \circ f)' = g' \circ f'$ obtenemos las fórmulas pedidas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}$$

**Observación**. Notemos que la derivada de una de las variables $u$ ó $v$ con respecto a una de las variables $x$, $y$ o $z$ se obtiene "pasando" por las variables intermedias $r$, $s$ de las cuales depende $u$ ó $v$ pero que, a su vez depende de $x$, $y$ ó $z$.

23. Si $u = xy + y$ ; $x = 2t^2 + 1$ , $y = 1 - 3t$; hallar $\frac{du}{dt}$. a) directamente, b) empleando la Regla de la Cadena.
Solucion. a) Componiendo las funciones tenemos:

$$u = xy + y = \left(2t^2 + 1\right)(1 - 3t) = -6t^3 + 2t^2 - 6t + 2$$

derivando:

$$\frac{du}{dt} = -18t^2 + 4t + -6$$

b) De acuerdo a la Regla de la Cadena, teniendo en cuenta que $u$ depende de $(x, y)$ que a su vez depende de $t$, (ver diagrama 4.5)

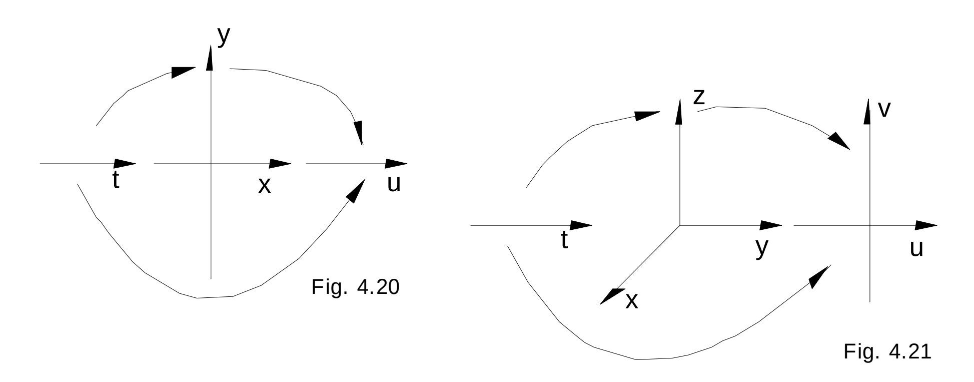


Fig. 4.20

Fig. 4.21

obtenemos

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

con

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4t\ ,\quad \frac{du}{dy} = x + 1$$

$$\frac{dx}{dt} = 4t\ ,\quad \frac{dy}{dt} = -3$$

tenemos

$$\frac{du}{dt} = y\,(4t) + (x+1)\,(-3) = 4ty - 3x - 3$$

y expresando en términos de $t$:

$$\frac{du}{dt} = 4t\,(1-3t) - 3\left(2t^2+1\right) - 3 = -18t^2 + 4t - 6$$

24. Si $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ ; $u = x^2y + z$ ; $v = z^2 - xy$, hallar $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$.
Solución. Notemos que $(u, v)$ depende de $(x, y, z)$ que a su vez depende de $t$ (ver diagrama 4.6).
Del diagrama 4.6:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Las derivadas de los segundos miembros obtenemos de las ecuaciones dadas. Reemplazando:

$$\frac{du}{dt} = (2xy)\,(1) + \left(x^2\right)(2t) + (1)\left(3t^2\right) = 4t^3 + 3t^2$$

expresión en términos de $t$.

$$\frac{dv}{dt} = (-y)\,(1) + (-x)\,(2t) + (2z)\left(3t^2\right) = 6t^5 - 3t^2$$

expresión en terminos de $t$.

25. Si $U = x + y - z^2$; $x = 2u - 3s$, $y = u$, $z = 2u^2 - v^2$, hallar $\frac{\partial U}{\partial u}$, $\frac{\partial U}{\partial v}$.

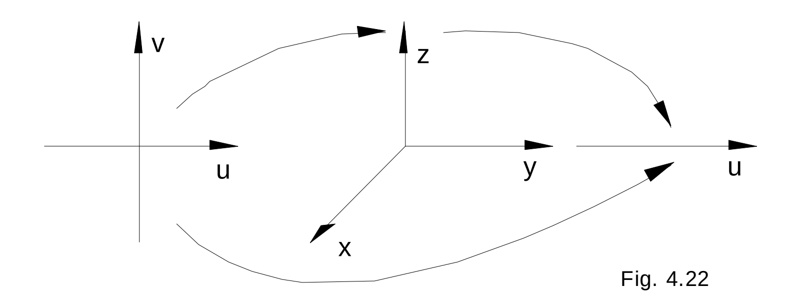


Fig. 4.22

Solución. Notemos que $U$ depende de $(x, y, z)$ que a su vez depende de

$(u, v)$ (ver diagrama 4.7).
Del diagrama 4.7.

$$\frac{dU}{du} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{du} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{du}$$

$$\frac{dU}{dv} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dv} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dv} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dv}$$

Derivando en las ecuaciones dadas y reemplazandos obtenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial u} = (1)(2) + (1)(v) + (-2z)(4u) = 2 + v - 8u\left(2u^2 - v^2\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial v} = (1)(-3) + (1)(u) + (-2z)(-2v) = -3 + u + 4u\left(2u^2 - v^2\right)$$

**DERIVADA DE FUNCIONES IMPLICITAS**

26. Si $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.
Solución. Esta ecuación en tres variables define a dos como variables independientes y una como dependiente. Como se pide $\partial z/\partial x$, $z$ es la variable dependiente mientras que $x$, $y$ son las variables independientes. Tenemos en cuenta esto derivamos la ecuación con respeto a $x$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \Rightarrow \; 2x + 0 + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \; \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

27. Si

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 - a^2 = 0 \\ x^2 y - y^2 z + xz^2 - a^3 = 0 \end{cases}$$

calcular $\dfrac{dy}{dx}$.

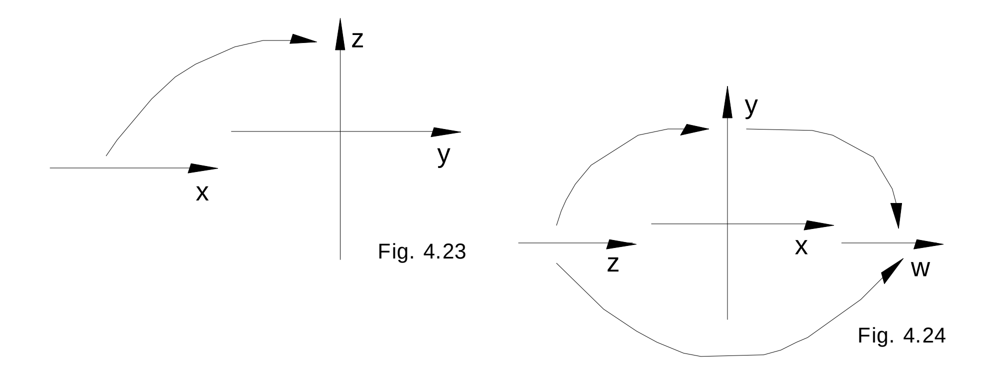


Fig. 4.23
Fig. 4.24

Solución. Este sistema de dos ecuaciones con tres variables determina a una de ellas como variable independiente y a las otras como variables

dependientes. Como se pide $\frac{dy}{dx}$ deducimos que $x$ es la variable independiente, mientras que $y$, $z$ son las dependientes. (ver diagrama 4.8).
Derivando el sistema con respecto a $x$:

$$x^2 - y^2 - z^2 - a^2 = 0 \quad , \quad x^2y - y^2z + +xz^2 - a^3 = 0$$

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} - 2z\frac{dz}{dx} = 0 \ \ , \ \ 2xy + x^2\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx}z - y^2\frac{dz}{dx} + z^2 + 2xz\frac{dz}{dx} = 0$$

Resolvemos para $\frac{dy}{dx}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} y\dfrac{dy}{dx} + z\dfrac{dz}{dx} = x \\ \left(x^2 - 2yz\right)\dfrac{dy}{dx} + \left(2xz - y^2\dfrac{dz}{dx}\right) = -\left(2xy + z^2\right) \end{array} \right. \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} x & z \\ -\left(2xy + z^2\right) & 2xz - y^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ x^2 - 2yz & 2xz - y^2 \end{vmatrix}}$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\left(2xz - y^2\right) + z\left(2xy + z^2\right)}{y\left(2xz - y^2\right) - z\left(x^2 - 2yz\right)}$$

28. Si $w = x(1-y)$ y $\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + 3z - 6 = 0 \end{array} \right.$, calcular $\frac{dw}{dz}$.
Solución. Primeramente notemos que $w$ depende $(x, y)$. Por otra parte, el sistema de todos ecuaciones con tres variables determina a una de ellas como variable independiente y a dos como variables dependientes. Como se pide $\frac{dw}{dz}$ deducimos que $z$ es la variable independiente y, por tanto, $(x, y)$ depende de $z$. (ver diagrama 4.9).
Del diagrama 4.9 tenemos:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dz} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dz} \qquad (1)$$

de $w = x(1-y)$ obtenemos: $\frac{\partial w}{\partial x} = 1 - y$ , $\frac{\partial w}{\partial y} = -x$ y derivando el sistema con respecto de $x$:

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + 3z - 6 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 2x\dfrac{dx}{dz} + 2y\dfrac{dy}{dz} + 2z = 0 \\ \dfrac{dx}{dz} + \dfrac{dy}{dz} + 3 = 0 \end{array}$$

resolviendo el sistema

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\begin{vmatrix} -2z & 2y \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3y - z}{x - y} \ ; \ \frac{dy}{dz} = \frac{\begin{vmatrix} 2x & -2z \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z - 3x}{x - y}$$

Finalmente, reemplazamos en (1) obtenemos:

$$\frac{dw}{dz} = (1-y)\,\frac{3y-z}{x-y} + (-x)\,\frac{z-3x}{x-y} = \frac{3\left(x^2-y^2\right)-(x-y+1)\,z+3y}{x-y}$$

29. Si $z = u^2 + v^2$, $\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = uv \end{cases}$ , calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

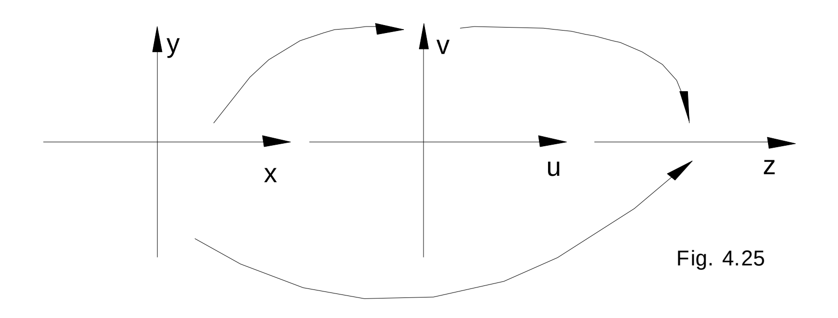


Fig. 4.25

Solución. Notemos que $z$ depende de $(u, v)$. Por otra parte el sistema de dos ecuaciones con 4 variables determina a dos de ellas como variables independientes y a otras dos como variables dependientes.
Como se pide $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ deducimos que $(x, y)$ son las dos variables independientes mientras que $(u, v)$ son variables dependientes (ver diagrama 4.10).
Del diagrama 4.10 tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

de $z = u^2 + v^2$, obtenemos: $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 2u$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = 2v$.
Derivando el sistema con respecto a $x$ y resolviendo:

$$\begin{array}{l} x = u^2 - v^2 \\ y = uv \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 = 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2v\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = \ v\dfrac{\partial u}{\partial x} \ + \ u\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2v \\ 0 & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix}} = \frac{u}{2\left(u^2+v^2\right)}\ ;\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 2u & 1 \\ v & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix}} = \frac{-v}{2\left(u^2+v^2\right)}$$

Derivando el sistema con respecto a $y$ y resolviendo:

$$\begin{array}{l} x = u^2 - v^2 \\ y = uv \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = 2u\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2v\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ 1 = \ v\dfrac{\partial u}{\partial y} + u\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2v \\ 1 & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix}} = \frac{v}{u^2+v^2} \ ; \ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 2u & 0 \\ v & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix}} = \frac{u}{u^2+v^2}$$

Reemplazando en (1) los valores obtenidos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2u)\,\frac{u}{2\left(u^2+v^2\right)} + (2v)\,\frac{-v}{2\left(u^2+v^2\right)} \ ; \ \frac{\partial z}{\partial y} = (2u)\,\frac{v}{u^2+v^2} + (2v)\,\frac{u}{u^2+v^2}$$

Simplificando

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2} \ ; \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4uv}{u^2+v^2}$$

**DERIVADA DE FUNCIONES INVERSAS.**

30. Calcular la derivada de la función inversa de $f(x) = x^2$.
Solución. Como $Df(x) = 2x$; entonces con $y = x^2$ tenemos

$$Df^{-1}(y) = (Df(x))^{-1} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

**Observación**. En este caso la función inversa y su derivada se pueden calcular directamente

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

31. Calcular la derivada de la función inversa de $f(x, y) = \left(x^2 - y^2, xy\right)$.

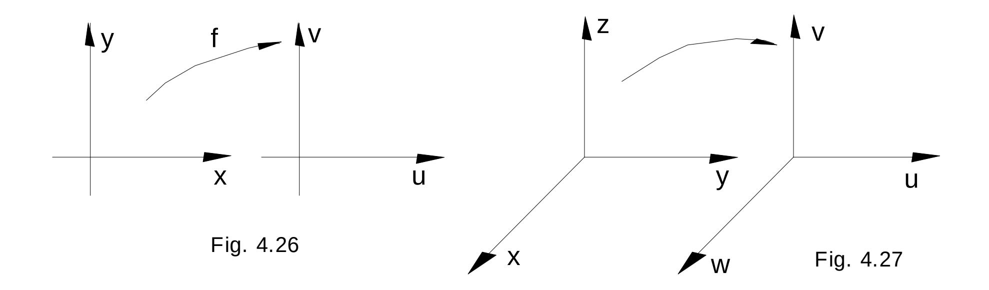



Fig. 4.26

Fig. 4.27

Solución. Hagamos $u = x^2 - y^2$, $v = xy$. Teniendo en cuenta el diagrama 4.11, la derivada de $f$ es:

$$Df = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{bmatrix}$$

Por tanto, la derivada de la función inversa es:

$$Df^{-1} = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\left(x^2 + y^2\right)} \begin{bmatrix} x & 2y \\ -y & 2x \end{bmatrix}$$

32. Si $f(x, y, z) = (ax, by, cz)$ calcular la derivada de la función inversa.
Solución. Haciendo $u = ax$, $v = by$, $w = cz$, teniendo en cuenta el diagrama ##, la derivada de $f$ es:

$$Df = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Por tanto, la derivada de la función inversa es:

$$Df^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

**PROBLEMAS VARIOS**.

33. Mostrar que $z = x^2 y \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ satisface la ecuación.

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3z$$

Solución. Como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy\sin\left(\frac{x}{y}\right) + x^2\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^3}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

Entonces, teniendo en cuenta que $z = x^2 y \sin\left(\frac{x}{y}\right)$, obtenemos:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left[2xy\sin\left(\frac{x}{y}\right) + x^2\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right] + y\left[x^2\sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^3}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$
$$= 3x^2 y\sin\left(\frac{x}{y}\right) = 3z$$

34. Mostrar que la función $z = 2x - x^3 + 3xy^2$ satisface

$$z_{xx} + z_{yy} = 0$$

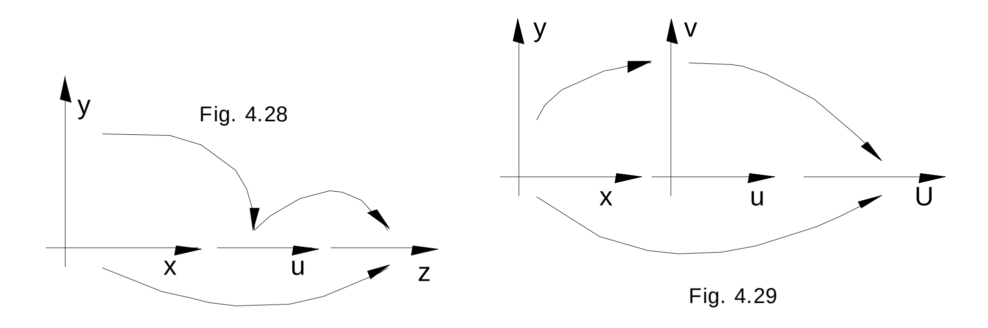
Solución. Derivando tenemos:

$$\begin{array}{lll} z_x = 2 - 3x^2 + 3y^2 & \Rightarrow & z_{xx} = -6x \\ z_y = 6xy & \Rightarrow & z_{yy} = 6x \end{array}$$

Por tanto,

$$z_{xx} + z_{yy} = -6x + 6x = 0$$

35. Si $z = f(2x - 3y)$, mostrar que $3z_x + 2z_y = 0$.




Solución. Hagamos $u = 2x - 3y$. Entonces $z = f(u)$; es decir $z$ depende de $u$ que a su ez depende de $(x, y)$. (ver diagrama 4.13).
Del diagrama 4.13 tenemos:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x}\ ,\ z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (1)$$

como $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -3$, reemplazando en (1):

$$z_x = 2\frac{dz}{du}\ ;\ z_y = -3\frac{dz}{du}$$

Por tanto,

$$3z_x + 2z_y = 3 \cdot 2\frac{dz}{du} + 2 \cdot (-3)\frac{dz}{du} = 0$$

36. Si $U = f(x - y, y - z)$, mostrar que

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

Solución. Hagamos $u = x - y$, $v = y - x$. Entonces $U = f(u,v)$, es decir $U$ depende de $(u,v)$ que a su vez depende de $(x,y)$. (ver diagrama 4.14). Del diagrama 4.14 tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial U}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial U}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial U}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \qquad (1)$$

De $u = x - y$, $v = y - x$ tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \ , \ \frac{\partial v}{\partial x} = -1 \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = -1 \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

reemplazando en (1):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial v}$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial v}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial U}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial v}\right) + \left(-\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial v}\right) = 0$$

37. Si $U = f(x+2y) - g(x-2y)$, mostrar que $U_{xx} - \dfrac{1}{4}U_{yy} = 0$.

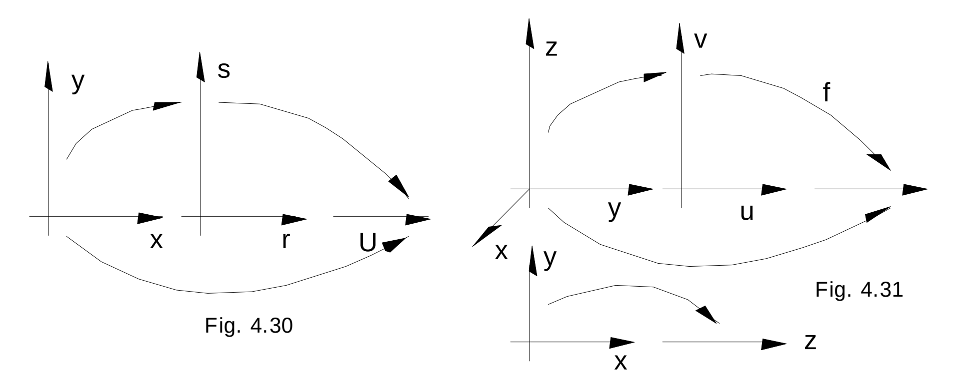



Fig. 4.30

Fig. 4.31

Solución. Hagamos $r = x + 2y$, $s = x - 2y$, entonces

$$U = f(r) - g(s)$$

Es decir, U depende de $(r,s)$ que a su vez depende de $(x,y)$. (ver diagrama 4.15). Del diagrama tenemos:

$$\begin{cases} U_x = \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial U}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} \\ U_y = \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial U}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial U}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y} \end{cases} \qquad (1)$$

De $U = f(r) - g(s)$, tenemos: $\dfrac{\partial U}{\partial r} = f'(r) - 0 = f'(r)$ y $\dfrac{\partial U}{\partial s} = 0 - g'(s) = -g'(s)$ (por ser $r, s$ independientes entre si). De $r = x + 2y$, $s = x - 2y$, tenemos: $\dfrac{\partial r}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial s}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = 2$, $\dfrac{\partial s}{\partial y} = -2$. Reemplazando en (1):

$$U_x = f'(r) - g'(s)\,,\; U_y = 2f'(r) + 2g'(s) \qquad (2)$$

Para hallar las segundas derivadas parciales $U_{xx}$, $U_{yy}$ debemos tener en cuenta que las primeras derivadas parciales $U_x, U_y$ dependen de las mismas variables que $U$ y, por tanto, se puede usar el mismo diagrama 4.15 para calcular dichas segundas derivadas parciales. Prosigamos; derivando en (2):

$$\begin{aligned} U_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(U_x) = \frac{\partial}{\partial x}(U_x)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial s}(U_x)\frac{\partial s}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial r}(f'(r) - g'(s)) \cdot 1 + \frac{\partial}{\partial s}(f'(r) - g'(s)) \cdot 1 \\ &= [f''(r) - 0] + [0 - g''(s)] \\ &= f''(r) - g''(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(U_y) = \frac{\partial}{\partial r}(U_y)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial s}(U_y)\frac{\partial s}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial r}[2f'(r) + 2g'(s)] \cdot 2 + \frac{\partial}{\partial s}[2f'(r) + 2g'(s)] \cdot (-2) \\ &= 2[2f''(r) + 0] - 2[0 + 2g''(s)] \\ &= 4f''(r) - 4g''(s) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$U_{xx} - \frac{1}{4}U_{yy} = [f''(r) - g''(s)] - \frac{1}{4}[4f''(r) - 4g''(s)] = 0$$

38. Mostrar que $f\left(x + y - z, x^2 + y^2\right) = 0$ satisface la ecuación

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = x - y$$

Solución. Antes que nada notemos que la expresión $f\left(x + y - z, x^2 + y^2\right) = 0$ es una ecuación con tres variables y, por tanto, determina a dos de ellas como variables independientes y a la restante como variable dependiente. La presencia $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ en la ecuación nos indica que $z$ es la variable dependiente; mientras que $x$, $y$ son las variables independientes. Hagamos:

$$u = x + y - z\;,\; v = x^2 + y^2 \qquad (1)$$

Entonces
$$f\left(u,v\right)=0 \qquad (2)$$
Es decir: $f$ depende de $(u,v)$, $(u,v)$ depende de $(x,y,z)$, a su vez $z$ depende de $(x,y)$. (Ver diagrama 4.16).
Teniendo en cuenta el diagrama 4.16 y derivando (2) con respecto a $x$ (considerando (1)):
$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(1+(-1)\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(2x+0\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0 \qquad (3)$$
Ahora derivando (2) con respecto a $y$ (considerando (1)):
$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(1+(-1)\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(2y+0\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0 \qquad (4)$$
de (3) y (4) obtenemos:
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial u}+2x\dfrac{\partial f}{\partial v}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial u}+2y\dfrac{\partial f}{\partial v}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}}$$
Por tanto, reemplazando y simplificando tenemos:
$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=x\frac{\dfrac{\partial f}{\partial u}+2y\dfrac{\partial f}{\partial v}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}}-y\frac{\dfrac{\partial f}{\partial u}+2x\dfrac{\partial f}{\partial v}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}}=x-y$$

39. Si $U=U\left(x,y\right)$; $x=2r-s$, $y=r+2s$; expresar $\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$ en términos de las derivadas con respecto a $r$, $s$.

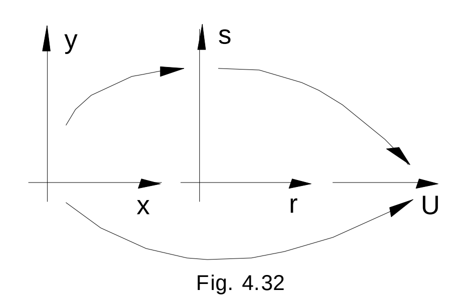


Fig. 4.32

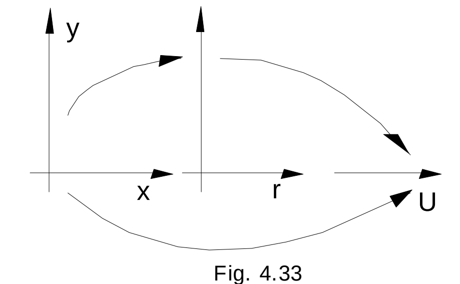


Fig. 4.33

Solución. Para obtener $\dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ debemos considerar a $U$ dependiendo de $(r, s)$ que a su vez depende de $(x, y)$ (ver diagrama 4.17). Entonces conviene expresar $r$, $s$ en términos de $x$, $y$:

$$\begin{array}{l} x = 2r - s \\ y = r + 2s \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} r = \dfrac{1}{5}(2x + y) \\ s = \dfrac{1}{5}(2y - x) \end{array}$$

de donde:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2}{5},\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{5},\ \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{5},\ \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{2}{5} \qquad (1)$$

Del diagrama 4.17, considerando (1), la primera derivada es:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{2}{5}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{5}\frac{\partial U}{\partial s} \qquad (2)$$

Para hallar la segunda derivada parcial debemos tener en cuenta que la primera derivada parcial $\dfrac{\partial U}{\partial x} = U_x$ depende de las mismas variables que $U$ y, por tanto, podemos usar el mismo diagrama 4.17.
Teniendo en cuenta ello, (1) y (2), obtenemos:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(U_x)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}(U_x)\frac{\partial}{\partial s}(U_x)\frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2}{5}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{5}\frac{\partial U}{\partial s}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{2}{5}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{5}\frac{\partial U}{\partial s}\right)\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{5}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{5}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial s}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial r} - \frac{1}{5}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)$$

Asumiendo que $\dfrac{\partial^2 U}{\partial r \partial s} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial s \partial r}$ (es decir, que son continuas):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{1}{25}\left(2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 3\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial s} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right)$$

40. Si $U = U(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$; expresar $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ en términos de las derivadas con respecto a $r$, $\theta$.
Solución. Primeramente notemos que el sistema de dos ecuaciones con cuatro variables $x$, $y$, $r$, $\theta$ determina a dos de ellas, $(x, y)$ ó $(r, \theta)$, como variables independientes y a las otras dos como dependientes. Para poder expresar $\dfrac{\partial^2 U}{dx^2}$ en términos de $r$, $\theta$ debe ocurrir que $(r, \theta)$ depende de $(x, y)$. Por tanto, debemos considerar a $U$ dependiendo de $(r, \theta)$, que a su

vez depende de $(x, y)$. (ver diagrama 4.18).
La primera derivada parcial es:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad (1)$$

Derivando el sistema con respecto a $x$ y, resolviendo obtenemos:

$$\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 1 = \dfrac{\partial r}{\partial x}\cos\theta - r\sin\theta\dfrac{\partial \theta}{\partial x} \\ \\ 0 = \dfrac{\partial r}{\partial x}\sin\theta + r\cos\theta\dfrac{\partial \theta}{\partial x} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta \\ \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{r} \end{matrix} \qquad (2)$$

reemplazando en (1):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \qquad (3)$$

Para hallar la segunda derivada parcial $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ debemos tener en cuenta que la primera derivada parcial $\dfrac{\partial U}{\partial x} = U_x$ depende de las mismas variables que $U$ y, por tanto se puede usar el mismo diagrama 4.18.
Considerando (2) y (3), procedemos:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(U_x) = \frac{\partial}{\partial r}(U_x)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}(U_x)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\theta - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\sin\theta}{r}$$

Al continuar derivando debemos tener en cuenta que las derivadas parciales $\dfrac{\partial U}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial U}{\partial \theta}$ dependen de las mismas variables que $U$, es decir también dependen de $r$, $\theta$; prosiguiendo (cada témino se deriva como producto):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\cos\theta - \frac{\partial^2 U}{\partial r\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r^2}\right)\cos\theta -$$

$$-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta\partial r}\cos\theta - \frac{\partial U}{\partial r}\sin\theta - \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\frac{\sin\theta}{r} - \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\sin\theta}{r}$$

Asumiendo que $\dfrac{\partial^2 U}{\partial r\partial \theta} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta\partial r}$ y simplificando, obtenemos finalmente:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial \theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r^2} + 2\frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}$$

**TEOREMA DEL VALOR MEDIO**

41. Desarrollar $f(x,y) = x^2y + 3y - 2$ en potencias de $(x-1)$, $(x+2)$.
Solución. Aplicamos el teorema de Taylor con $h = x - 1$, $k = y + 2$, (así aparecerán en el desarrollo las potencias pedidas) y por tanto tomamos $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ (es decir, $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$):

$$f(x,y) = x^2y + 3y - 2 \quad ; \quad f_x = 2xy \quad ; \quad f_y = y^2 + 3$$

$$f_{xx} = 2y \quad ; \quad f_{xy} = 2x \quad ; \quad f_{yy} = 0$$

$$f_{xxx} = 0 \quad ; \quad f_{xxy} = 2 \quad ; \quad f_{xyy} = 0 \quad ; \quad f_{yyy} = 0$$

Todas las demás derivadas superiores son nulas. Evaluando en $(1,-2)$ tenemos:

$$f(1,-2) = -10 \quad ; \quad f_x(1,-2) = -4 \quad ; \quad f_y(1,-2) = 4$$

$$f_{xx}(1,-2) = -4 \quad ; \quad f_{xy}(1,-2) = 2 \quad ; \quad f_{yy}(1,-2) = 0$$

$$f_{xxx}(1,-2) = 0 \quad ; \quad f_{xxy}(1,-2) = 2 \quad ; \quad f_{xyy}(1,-2) = 0 \quad ; \quad f_{yyy}(1,-2) = 0$$

Entonces, por el teorema de Taylor:

$$f(x,y) = f(1,-2) + hf_x(1,-2) + kf_y(1,-2) + \frac{1}{2!}\left[h^2f_{xx}(1,-2) + 2hkf_{xy}(1,-2) + k^2f_{yy}(1,-2)\right]$$
$$+\frac{1}{3!}\left[h^3f_{xxx}(1,-2) + 3h^2kf_{xxy}(1,-2) + 3hk^2f_{xyy}(1,-2) + k^3f_{yyy}(1,-2)\right] +$$

donde el resto $R_3$ en este caso es nulo.
Reemplazando obtenemos el desarrollo pedido:

$$f(x,y) = x^2y + 3y - 1$$
$$= -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + (x-1)^2(y+2)$$

**DIFERENCIAL**

42. Si $z = 3x^2 - xy + y^3$, calcular a) $\Delta z$; b) $dz$ con $x = 3$, $y = 2$; con $dx = 0.1$, $dy = -0.2$ y c) hallar $\Delta z$ y $dz$ si $x = 3$, $y = 2$, $dx = 1$, $dy = -2$.
Solución. a) Con $x = 3$, $y = 2$, $dx = 0.1$, $dy = -0.2$ tenemos:

$$\Delta z = z(3+0.1, 2-0.2) - z(3,2) = z(3.1, 1.8) - z(3,2)$$
$$= 29.082 - 29 = 0.082$$

b) como

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (6x - y)\,dx + \left(-x + 3y^2\right)dy$$

Entonces evaluando las derivadas parciales en $x = 3$, $y = 2$ y con $dx = 0.1$, $dy = 0.2$ tenemos:

$$dz = (6(3) - 2)(0.1) + (--3 + 3(4))(-0.2) = 1.60 - 1.80 = -0.2$$

Notemos que por ser $dx$, $dy$ pequeños los valores de $\Delta z$ y $dz$ son aproximadamente iguales.
c) Con $x = 3$, $y = 2$, $dx = 1$, $dy = -2$, tenemos:

$$\Delta z = z(3+1, 2-2) - z(3,2) = z(4,0) - z(3,2) = 48 - 29 = 19$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (6x - y)\,dx + \left(-x + 3y^2 dy\right) = (16)(1) + (9)(-2) = -2$$

Notemos que $dz$ y $\Delta z$ difieren en mucho.

**PROBLEMAS VARIOS**

43. Si $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, mostrar que

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

suponiendo que todas las derivadas parciales son continuas.
Solución. Por el ejercicio 13 para funciones de una variable tenemos:

$$g'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$$

haciendo $r(h) = g'(t) - \dfrac{g(t+h) - g(t)}{h}$ tenemos que $g(t+h) = g(t) + g'(t)\,h + r(h)\,h$ con $\lim\limits_{h \to 0} r(h) = 0$. Por tanto, podemos escribir:

$$f_1(x+h, y+k) = [f_1(x+h, y+k) - f_1(x, y+k)] + [f_1(x, y+k) - f(x,y)] + f_1(x,y)$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y+k)\,h + r_1(h)\,h + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\,h + r_2(k)\,k + f_1(x,y)$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)\,h + r_1(h,k)\,h + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\,k + r_2(k)\,k + f_1(x,y)$$

por la continuidad de $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$.

$$f_2(x+h, y+k) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\,h + r_3(h,k)\,h + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\,k + r_4(k)\,k + f_2(x,y)$$

con

$$r_i \to 0 \quad \text{si} \quad (h,k) \to (0,0)$$

Luego:

$$f(x+h, y+k) = \begin{bmatrix} f_1(x+h, y+k) \\ f_2(x+h, y+k) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

de donde se deduce lo pedido.
Similarmente procediendo, se puede establecer la generalización para funciones de $R^n$ en $R^m$.

## 4.13 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $f(x,y) = (2x-y, xy-1)$ hallar a) $f(1,2)$, b) $f(1+h, 2+k)$.
2. Si $f(x,y) = \dfrac{2x+y}{1-xy}$ hallar a) $f(1,-3)$, b) $\dfrac{f(x_0+h,y)-f(x_0,y)}{h}$.
3. Si $f(x,y) = (2x+y, x-y)$ hallar la imágen de a) la recta $x=4$, b) la recta $x+y=1$.
4. Si $f(x,y) = \left(xy, xy^3\right)$ hallar la imágen de la región limitada por $xy=1$, $xy=4$, $xy^3=1$, $xy^3=2$.
5. Si $f(x,y) = (x+y, x-y, 2x+y)$ hallar la imagen de a) la recta $x=y$, b) el segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(2,3)$.
   Graficar el dominio de las siguientes funciones:
6. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2+y^2}$.
7. $f(x,y) = \ln(x+y)$.
8. $f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{2x-y}{x+y}\right)$.
9. $f(x,y,z) = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.
10. $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$.
11. $f(x,y,z) = \sqrt{\dfrac{x+y+z-1}{x^2+y^2+z^2-1}}$.
    Para cada una de las siguientes funciones graficar los conjuntos de nivel correspondientes a los valores datos de $c$.
12. $f(x,y) = x^2+y^2$; $c = 0,1,4,9$.
13. $f(x,y) = xy$; $c = 1,-1,4,-4$.
14. $f(x,y) = y-x^2$; $c = 0,1,2,-4$.
15. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; $c = 0,1,-1$.
16. $f(x,y,z) = x+y+z$; $c = -1,0,1$.
17. $f(x,y,z) = z-\sqrt{x^2+y^2}$; $c = -2,0,2$.
    Para las funciones $f$, $g$ dadas hallar, si es posible, la función compuesta $g \circ f$.

18. $f(x,y) = (x-y, x+y)$, $g(x,y) = (2x-1, x-2y)$.

19. $f(x,y) = \left(x, x^2, x^3\right)$, $\quad g(x,y,z) = x+y-2z$.

20. $f(x,y,z) = xyz$, $\quad g(x) = (e^x, x)$.

21. $f(x,y) = x+y$, $\quad g(x,y) = xy$.

22. Entre las siguientes funciones efectuar todas las posibles composiciones: $f(x,y) = x+3y$, $g(x,y,z) = (xy, xz)$, $h(x) = (x, 1-x)$.
**LIMITE Y CONTINUIDAD**

23. Hallar el límite de a) $f(x,y)\, x^3 - xy + y^3 + 3$, b) $f(x,y) = \left(x^3 y, xy^3\right)$ en el punto $(1,-1)$.

24. Mostrar que $f(x,y) = \dfrac{3x-2y}{2x-3y}$ no tiene límite en $(0,0)$.

25. Mostrar que $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ no tiene límite en el origen.

26. Determinar $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ si $f(x,y) = \dfrac{2x^3-y^3}{x^3+2y^3}$. ¿Qué puede decirse acerca del límite doble $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

27. Determinar los puntos donde $f(x,y,z) = \dfrac{2xyz}{x-y}$ es discontinua.

28. Es continua en $(0,0)$ la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

29. Determinar los puntos donde $f(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{x-y}, \dfrac{x-y}{x+y}\right)$ es continua. Graficar.

30. Mostrar que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ es continua sobre toda recta que pasa por el origen. Mostrar que, sin embargo, $f$ no es continua en el origen.
**DERIVADA SEGUN DEFINICION**
De acuerdo a la definición hallar la derivada de:

31. $f(x) = 3x+1$.

32. $f(x) = x^2 + x$.

33. $f(x) = \left(x^2, 3x, x\right)$.

34. $f(x,y) = x + 2y$.

35. $f(x,y) = xy$.

36. $f(x,y) = x^2 - y^2$.

37. $f(x,y,z) = 2xy + z$ en $(1,2,1)$.

38. $f(x,y) = (2x - y, xy)$.

39. $f(x,y) = \left(x^2 - y, y^2 - x\right)$.

40. $f(x,y) = \left(x^2 - y, x + y, x - y\right)$.

41. $f(x,y,z) = (xy, x + z)$ en $(1,0,-1)$.

42. $f(x,y,z) = (xy, xz, yz)$.
**DERIVADAS PARCIALES**
Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ si:

43. $f(x,y) = xy + 3x^2 - y$.

44. $f(x,y) = xe^y + \sin xy$.

45. $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$.

46. $f(x,y,z) = xyz + xye^{z^2}$.

47. $f(x,y,z) = \ln(xy) + \cos(xyz)$.
Calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, si

48. $f(x,y) = x^3 - xy^2 + y^4$.

49. $f(x,y) = (x - y)\sin(3x + 2y)$.
Calcular todas las segundas derivadas parciales, si:

50. $f(x,y,z) = xy^2z^3$.

51. $f(x,y,z) = x^3y^2 + yz^3$.

52. $w = \sin\left(\dfrac{x - y}{z}\right)$.
Mostrar que las derivadas cruzadas $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ son iguales:

53. $f(x,y) = \dfrac{2x - y}{x + y}$, $x + y \neq 0$.

54. $f(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$, $(x,y) \neq (0,0)$.

55. Si $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x-y}{x+y} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Hallar a) $f_x(0,0)$, b) $f_y(0,0)$.

# Chapter 5

# APLICACIONES DE LA DERIVADA

## 5.1 TRANSFORMACION DE ECUACIONES

Si en una ecuación dada, que incluye derivadas, se realiza un cambio de variables se obtiene una nueva ecuación en términos de las derivadas respecto a las nuevas variables. Este tipo de transformaciones se realiza aplicando la Regla de la Cadena.

**Example 47** *Mostrar que efectuando el cambio de variables $x = e^r$, $y = e^s$, la ecuación*

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

*se transforma en*

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

*De la última ecuación se ve que $U$ es función de $r, s$; pero $r, s$ depende de $x, y$. Debemos expresar cada uno de los términos de la primera ecuación en términos de $r, s$. Teniendo en cuenta el diagrama 5.1 y aplicando la regla de la cadena:*

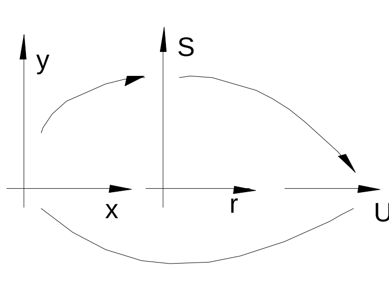


Fig. 5.1.

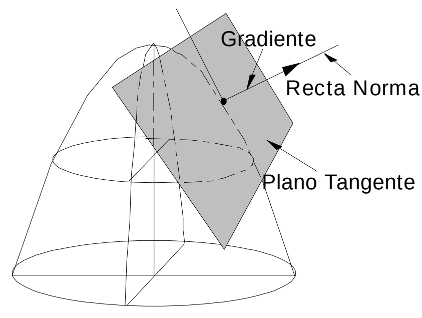


Fig. 5.2

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}$$

*de*

$$\begin{matrix} x = e^r & & \ln x = r \\ & \Longrightarrow & \\ y = e^s & & \ln y = s \end{matrix}$$

*entonces*

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{1}{y}$$

*Por tanto*

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\partial U}{\partial s}(0)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r}(0) + \frac{\partial U}{\partial s}\left(\frac{1}{y}\right)$$

*Finalmente, por reemplazo vemos que la primera ecuación se transforma en:*

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$
$$x\frac{\partial U}{\partial r}\left(\frac{1}{x}\right) + y\frac{\partial U}{\partial s}\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

*finalmente*

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

## 5.2 PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL

La gráfica de una función de la forma $f(x, y, z) = c$, $c$ constante, es una superficie. Consideremos un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de dicha superficie, entonces un vector perpendicular al **plano tangente** a la superficie en $P$ es la derivada de $f$ en $P$ (ejercicio 17); además, este vector es un vector direccional de la **recta normal** a la superficie en $P$.

Generalmente se representa por $\nabla f$ a la derivada de $f$, llamada también gradiente, es decir:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \tag{5.1}$$

Con esta notación, la ecuación del plano tangente en $P(x_0, y_0, z_0)$ es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z - z_0) = 0 \tag{5.2}$$

Y la ecuación de la recta normal en $P(x_0, y_0, z_0)$ es:

$$X = (x_0, y_0, z_0) + t\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \tag{5.3}$$

Las derivadas parciales que aparecen en las ecuaciones del plano tangente y recta normal se evalúan en $P(x_0, y_0, z_0)$.

**Example 48** *Hallar la ecuación del plano tangente y la recta normal a la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ *en el punto* $(1, 2, 3)$.
*Como*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z)\,;$$

*el gradiente en el punto* $(1, 2, 3)$ *es*

$$\nabla f = (2, 4, 6)\,.$$

*Por tanto, la ecuación pedida del plano tangente es*

$$2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0$$

*ó*

$$x + 2y + 3z = 14.$$

*La ecuación de la recta normal es*

$$X = (1, 2, 3) + t(2, 4, 6)$$

## 5.3 DERIVADA DIRECCIONAL

Dada una función $f$ de $R^n$ en $R$ y un vector unitario $V$, la derivada direccional de $f$, en $X$, en la dirección de $V$ se representa por $\nabla_V f(X)$ (o simplemente por $\nabla_V f$) y está definida por

$$\nabla_V f = \lim_{t\to 0}\frac{f(X+tV) - f(V)}{t}. \tag{5.4}$$

Como se ve, esta derivada direccional mide la variación de $f$ en la dirección de $V$.

Notemos que la derivada parcial de $f$ con respecto a una determinada variable es la derivada direccional de $f$ en la dirección del eje correspondiente a tal variable. Por ejemplo, para $f(x, y)$ y con $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ -vectores direccionales de los ejes $x$ y $y$ respectivamente, tenemos:

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} f &= \lim_{t\to 0}\frac{f(X+t_{e_1}) - f(X)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x} \\
\nabla_{e_2} f &= \lim_{t\to 0}\frac{f(X+t_{e_2}) - f(X)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x, y+t) - f(x, y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}$$

Esto muestra que la derivada direccional de $f$ en la dirección del eje $x$ es la derivada parcial de $f$ con respecto a $x$ y, a su vez, la derivada direccional de $f$ en la dirección del eje $y$ es la derivada parcial de $f$ con respecto a $y$.

### 5.3.1 Cálculo de la derivada direccional

El cálculo de la derivada direccional de $f$ en la dirección de un vector $V$ (ahora no necesariamente unitario) se efectúa según

$$\nabla_V f = \nabla f \cdot \frac{V}{|V|} \tag{5.5}$$

(ver ejercicio 24).

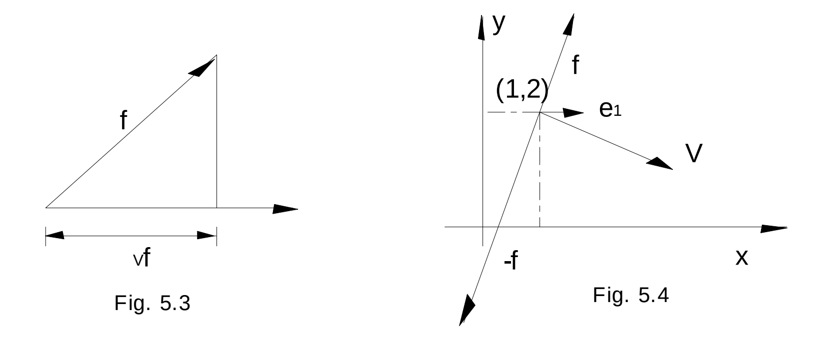


Fig. 5.3 Fig. 5.4

Esto muestra que la derivada direccional de $f$ en la dirección de $V$ es la componente del gradiente de $f$, $\nabla f$, en la dirección de $V$. (Fig. ###).

**Example 49** *Si* $f(x,y) = x^2 + y^2$, *la derivada direccional de* $f$ *en el punto* $(1,2)$ *en la dirección del vector* $e_1 = (1,0)$ *es*

$$\nabla_{e_1} f = \nabla f \cdot \frac{e_1}{|e_1|} = (2,4) \cdot (1,0) = 2$$

*por ser*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, 2y)$$

*Por otra parte, la derivada direccional de* $f$ *en el mismo punto* $(1,2)$ *pero esta vez en la dirección del vector* $V = (3,-4)$ *es*

$$\nabla_V f = \nabla f \cdot \frac{V}{|V|} = (2,4) \cdot \frac{(3,-4)}{5} = -2$$

### 5.3.2 Propiedad del gradiente

Una propiedad del gradiente es que la máxima derivada direccional de $f$ en el punto $X_0$ se produce en la dirección del mismo vector gradiente (por supueto, esto es cierto cuando $\nabla f(X_0) \neq 0$; si $\nabla f(X_0) = 0$ no se puede decir nada). Además, la mínima derivada direccional de $f$ en $X_0$ se produce en la dirección de $-\nabla f(X_0)$. Los valores de la máxima y mínima derivada direccional de $f$ en el punto $X_0$ son $|\nabla f(X_0)|$ y $-|\nabla f(X_0)|$ respectivamente. (Ver ejercicio 25).

**Example 50** *Si en el ejemplo ## $f(x,y) = x^2 + y^2$ representa la temperatura en el punto $(x,y)$ medida en grados y la distancia se mide en metros, entonces en el punto $(1,2)$ la temperatura aumenta a razón de 2 grados por metro en la dirección del vector $e_1 = (1,0)$; mientras que en la dirección del vector $V = (3,4)$ la temperatura disminuye a razón de 2 grados por metro.*
*El máximo aumento y la máxima disminución de la temperatura en este punto se produce en la dirección de los vectores $\nabla f = (2,4)$ y $-\nabla f\,(2,-4)$, respectivamente; sus respectivos valores son $|\nabla f| = 20$ grados por metro y $-|\nabla f| = -20$ grados por metro (Fig. ###).*

## 5.4 MAXIMOS Y MINIMOS

Dada una función $f$ de $R^n$ en $R$, se dice que $f$ tiene máximo relativo en $X_0$ si $f(X_0) \geq f(X)$ para todo $X$ próximo a $X_0$ (es decir, para $X$ tal que $|X - X_0| < \delta$, para algún $\delta > 0$).

Si $f(X_0) \leq f(X)$ para todo $X$ próximo a $X_0$, se dice que $f$ tiene un mínimo relativo en $X_0$.

La derivada permite determinar los puntos donde una función tiene sus máximos y mínimos relativos. Aunque el estudio para funciones de una sola variable, realizado en el Cálculo I, se extiende siguiendo la misma idea a funciones de $n$ variables en general, aquí se trata solamente con funciones a dos variables.

**Teorema 5.1.** (Regla para la determinación de máximos y mínimos).

Si $f(x,y)$ tiene sus primeras y segundas derivadas parciales continuas, entonces:

1. $f$ tiene mínimo relativo en $(x_0, y_0)$ si:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

entonces

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$$

2. $f$ tiene máximo relativo en $(x_0, y_0)$ si:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

entonces

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$$

3. $f$ no tiene ni máximo ni mínimo relativos en $(x_0, y_0)$ si $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ y $\Delta < 0$. En este caso el punto se llama punto de silla.

4. En caso de que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ y $\Delta = 0$, no se puede afirmar.

(Por supuesto, todas las derivadas parciales se evalúan en $(x_0, y_0)$).

Para su demostración ver los ejercicios 33 y 34.

En otras palabras, para hallar los máximos y mínimos relativos de $f$ se debe proceder de la siguiente manera:

1. Resolver el sistema $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ para encontrar los posibles puntos donde $f$ tiene sus máximos y mínimos (llamados puntos críticos).

2. Para cada punto crítico, determinar el signo de

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Si $\Delta > 0$, entonces en el punto examinado hay mínimo si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ (ó $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$); y hay máximo si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ (ó $\dfrac{\partial^2 f}{dy^2} < 0$).

Si $\Delta < 0$, el punto examinado es punto de silla. Cuando $\Delta = 0$ no se puede afirmar nada y hay que realizar un estudio más detenido.

Notemos que por ser $f' = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, en realidad los puntos críticos $(x_0, y_0)$ son los que satisfacen $f'(x_{0,0}) = 0$.

**Example 51** *Hallar los máximos y mínimos relativos de* $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3$.

*Resolviendo*

$$\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 = 0 & & x = 1 \\ & \textit{tenemos} & \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4 = 0 & & y = 2 \end{array}$$

*Por tanto, el punto crítico* $(1, 2)$ *es posible máximo o mínimo relativo. Considerando que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

*tenemos*

$$\Delta = (2)(2) - 0^2 = 4 > 0$$

*y como*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0,$$

*entonces en* $(1, 2)$ *hay un mínimo relativo.*

## 5.5 MAXIMOS Y MINIMOS CONDICIONADOS (Multiplicadores de Lagrange)

Se desea encontrar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x,y)$ sujeta a la condición $\phi(x,y)=0$. Un método consiste en formar la función auxiliar

$$F = f + \lambda\phi \tag{5.6}$$

donde $\lambda$, llamada multiplicador de Lagrange, es una variable independiente de $x, y$. Los puntos donde la función $f(x,y)$ sujeta a $\phi(x,y)=0$, toma sus máximos y mínimos relativos son puntos críticos de la función auxiliar $F$ (ejercicio 46). Más aún, los máximos y mínimos relativos de $F$ lo son también de $f(x,y)$ sujeta a $\phi(x,y)=0$.

Por tanto, los posibles máximos y mínimos relativos de $f(x,y)$, sujeta a $\phi(x,y)=0$, se obtienen de $F'=0$; es decir resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \phi(x,y) = 0 \text{ (ecuación de restricción)} \end{aligned} \tag{5.7}$$

A menudo resulta útil la interpretación geométrica o física del problema para determinar la naturaleza de cada punto crítico. Sin embargo, reemplazando el valor de $\lambda$ obtenido del sistema (##) en la función auxiliar (##) y aplicando el criterio ## podemos averiguar si tal punto crítico es máximo y mínimo relativo de la función auxiliar $F$; y en tal caso dicho punto es máximo y mínimo relativo de $f$ sujeto a $\phi(x,y)=0$. Si el punto crítico no es máximo ni mínimo de $F$ no significa todavía que tampoco lo sea de $f$ sujeta a $\phi=0$.

El método se generaliza a funciones $f(x_1,x_2,...,x_n)$ sujeta a las condiciones $\phi_1(x_1,x_2,...,x_n)=0,...,\phi_m(x_1,x_2,...,x_n)=0$. Se toma la función auxiliar

$$F = f + \lambda_1\phi_1 + ... + \lambda_m\phi_m$$

y los posibles máximos y mínimos relativos condicionados de $f$ se obtienen del sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1\frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} + ... + \lambda_m\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} = 0 \qquad (i=1,2,...,n)$$

$$\phi_1 = 0, \phi_2 = 0, ..., \phi_m = 0$$

## 5.6 DERIVACION BAJO EL SIGNO DE LA INTEGRAL

Cuando el integrando, además de depender de la variable de integración $x$, depende de $u$, entonces la misma integral depende de $u$ y, por tanto, podemos

derivarla con respecto de $u$. Más aún, hasta en el caso de que los límites de integración dependan de $u$ podermos todavía derivar la integral con respect a $u$. en forma precisa, si

$$g(u) = \int_{u_1}^{u_2} f(x,u)\,dx$$

donde $u_1$, $u_2$ pueden depender de $u$; entonces la derivada de $g$ con respecto de $u$ es:

$$\begin{aligned} g'(u) &= \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial}{\partial u} f(x,u)\,dx + f(x,u)\Big|_{x=u_2} \frac{du_2}{du} - f(x,u)\big|_{x=u_1} \frac{du_1}{du} \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\,dx + f(u_2,u)\,u_2' - f(u_1,u)\,u_1' \end{aligned} \tag{5.8}$$

Por supuesto, todas las funciones y sus derivadas que intervienen en (##) deben ser continuas.

En caso de que los límites de integración $u_1$, $u_2$ sean constantes, los dos últimos términos de (##) se anulan.

La igualdad (##), llamada regla de Leibnitz, se puede usar para calcular integrales definidas (ejercicio 49).

**Example 52** *Si*

$$g(u) = \int_{u}^{u^2} \sin ux\; dx$$

*entonces:*

$$\begin{aligned} g'(u) &= \int_{u}^{u^2} \frac{\partial}{\partial u}(\sin ux)\,dx + \sin ux\Big|_{x=u^2} \left(u^2\right)' - \sin ux\Big|_{x=u} (u)' \\ &= \int_{u}^{u^2} x\cos ux\; dx + 2u\sin u^3 - \sin u^2 \end{aligned}$$

## 5.7 CALCULOS APROXIMADOS

Si $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, el incremento $\Delta z = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_n + h_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es aproximadamente igual a la diferencial

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n$$

para valores pequeños de los incrementos $h_1, h_2, ..., h_n$. Escribiendo $dx_i$ en lugar de $h_i$; tenemos:

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_n + h_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n) \simeq \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... \tag{5.9}$$

donde las derivadas parciales se evalúan en $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

La formula ## dice que la variación producida en $f$ por las pequeñs variaciones en las variables $x_1, x_2, ..., x_n$; es aproximadamente igual a la diferencial de $f$. Este hecho se puede aplicar para realizar cálculos aproximados.

**Example 53** *Calcular* $\sqrt{(3.01)^2 + (3.98)^2}$. *Consideremos la función* $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Notemos que* $f(3, 4) = \sqrt{9 + 16} = 5$; *además* $(x, y) = (3, 4)$ *tenemos*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3}{5} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{4}{5}$$

*Por tanto, de ## y con* $dx = 0.01$, $dy = -0.02$, *tenemos*

$$\sqrt{(3.01)^2 + (3.98)^2} = f(3 + 0.01, 4 - 0.02) \simeq f(3, 4) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$
$$= 5 + \frac{3}{5}(0.01) + \frac{4}{5}(-0.02) = 4.99$$

**Example 54** *La altura de un cono es* $h = 30$ *cm, el radio de su base es* $r = 10$ *cm. Calcular la variación del volumen del cono si* $h$ *se aumenta en 0.3 cm y* $r$ *se disminuye en 0.1 cm.*
*El volumen del cono es* $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$. *La variación* $\Delta V$ *es aproximadamente igual a la diferencial del volumen* $dV$. *Con*

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\pi}{3} rh = \frac{2\pi}{3}(10)(30) = 628.32$$
$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{3} r^2 = \frac{\pi}{3}(10)^2 = 104.72$$

*y* $dh = 0.3$, $dr = -0.1$ *tenemos:*

$$\Delta V - dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = (628.32)(-0.1) + (104.72)(0.3)$$
$$= -31.42 \ cm^3$$

*El signo menos dice que el volumen del cono disminuye en 31.42* $cm^3$.

## 5.8 ERRORES

Consideremos una función $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ de las variables $x_1, x_2, ..., x_n$. Supongamos que en un caso específico en la evaluación de los valores de $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ se han obtenido los valores aproximados $x_1, x_2, ..., x_n$ respectivamente, habiéndose cometido algún error en cada una de estas mediciones (debido a limitaciones técnicas de los instrumentos de medición, por ejemplo). Sin embargo, también se conoce el margen de error cometido en cada medición; es decir, se sabe que el valor verdadero $\overline{x}_i$, no difiere del aproximado $x_i$ más de cierta cantidad $h_i$.

$$x_1 - h_1 \leq \overline{x}_1 \leq x_1 + h_1 \quad , \quad x_2 - h_2 \leq \overline{x}_2 \leq x_2 + h_2, ..., x_n - h_n \leq \overline{x}_n \leq x_n + h_n$$

tomando el caso más desfavorable, es decir $\overline{x}_1 = x_1 \pm h_1$, $\overline{x}_2 = x_2 \pm h_2$, ... , $\overline{x}_n = x_n \pm h_n$ y empleando la diferencial:

$$\begin{aligned} f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) &= f(x_1 \pm h_1, x_2 \pm h_2, ..., x_n \pm h_n) \simeq \\ &\simeq f(x_1, x_2, ..., x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\pm h_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\pm h_2) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\pm h_n) \end{aligned} \tag{5.10}$$

donde las derivadas parciales anteriores se evalúan en $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de (##) se sigue que

$$|f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)| \simeq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\pm h_1) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\pm h_n) \right| \tag{5.11}$$

$$|f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| |h_1| + .. + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| |h_n| \tag{5.12}$$

La desigualdad (##) dice que el valor verdadero $f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ difiere del aproximado $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ a lo más en

$$E = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| |h_1| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| |h_2| + .. + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| |h_n| \tag{5.13}$$

que, también se escribe

$$E = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| |dx_1| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| |dx_2| + .. + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| |dx_n| \tag{5.14}$$

con $h_1 = dx_1$, $h_2 = dx_2, ..., h_n = dx_n$.

Al máximo error $E$, dado por (##) ó (##), que se comete al tomar $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ en lugar de $f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ se llama Error Absoluto Máximo.

A la razón del error absoluto máximo $E$ respecto al valor absoluto del valor aproximado $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ se llama Error Relativo Máximo y se representa por $e$; es decir:

$$e = \frac{E}{|f(x_1, x_2, ..., x_n)|} \tag{5.15}$$

Se puede demostrar que el error relativo máximo de una función es igual al error absoluto máximo del logaritmo de esta función, (ejercicio 58); y que el error relativo máximo de un producto es igual a la suma de los errores relativos máximos de los factores, (ejercicio 59). Ver también el ejercicio propuesto 79.

**Example 55** *La hipotenusa $c = 5$ y el cateto $a = 3$ de un triángulo rectángulo (Fig. ###) han sido medidos con los errores absolutos máximos $h_1 = 0.1$,*

*$h_2 = 0.2$, respectivamente.*

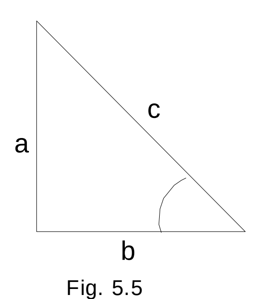



Fig. 5.5

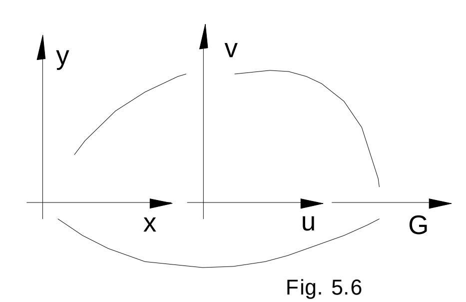



Fig. 5.6

*Determinar el a) error aboluto máximo, y b) error relativo máximo, que se comete al calcular el ángulo $\theta$ por la fórmula*

$$\sin\theta = \frac{a}{c}$$

*a) De $\sin\theta = \frac{a}{c}$, se tiene: $\theta = \arcsin\frac{a}{c}$, entonces*

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}} \quad , \quad \frac{\partial\theta}{\partial c} = \frac{a}{c\sqrt{c^2 - a^2}}$$

*Por tanto, con $a = 3$, $c = 5$, $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.2$ y de la fórmula (4), el error absoluto máximo es*

$$E = \frac{1}{\sqrt{5^2 - 3^2}}\,(0.1) + \frac{3}{5\sqrt{5^2 - 3^2}}\,(0.2) = 0.055 \textit{ rad.}$$

*Notemos que lo anterior significa*

$$\theta = \arcsin\frac{3}{5} \pm 0.055 \textit{ rad.}$$

*b) De la parte a) el error absoluto es 0.055; y como el valor aproximado es:*

$$\theta = \arcsin\frac{3}{5} = 0.6435 \textit{ rad;}$$

*el error relativo máximo es*

$$e = \frac{0.0550}{0.6435} = 0.0855$$

## 5.9 EJERCICIOS RESUELTOS

### TRANSFORMACIÓN DE ECUACIONES

1. Transformar la ecuación $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ efectuando el cambio de variable $u = x$, $v = x^2 + y^2$.
   Solución. En la nueva ecuación $z$ dependerá de $u$, $v$; a su vez $u$, $v$ depende de $x$, $y$. Debemos expresar cada término de la ecuación dada en función de las nuevas variables $u$, $v$. Del diagrama 1 y aplicando la regla de la cadena tenemos
   $$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \qquad (1)$$
   De: $u = x$, $v = x^2 + y^2$, se tiene $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$; $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2y$.
   Entonces, teniendo en cuenta (1), obtenemos
   $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + 2x\frac{\partial z}{\partial v} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\frac{\partial z}{\partial v}$$
   Finalmente, reemplazando en la ecuación original:
   $$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \;\Rightarrow\; y\left(\frac{\partial z}{\partial u} + 2x\frac{\partial z}{\partial v}\right) - x\left(2y\frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0$$
   de donde, simplificando, obtenemos la nueva ecuación:
   $$\frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

2. Transformar la ecuación $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, efectuando el cambio de variable
   $$u = x \;,\; v = \frac{y}{x}$$
   Solución. en la nueva ecuación $z$ dependerá de $u$, $v$; a su vez depenerá de $x$, $y$. Debemos expresar cada término de la ecuación dada en función de las nuevas variables $u$, $v$. Del diagrama 2 y aplicando la regla de la cadena tenemos:
   $$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \qquad (2)$$
   Reemplazando en (2)
   Reemplazando en la ecuación original y simplificando: De donde, teniendo en cuenta que $u = x$, obtenemos la nueva ecuación:
   $$u\frac{\partial z}{\partial u} = z$$

3. Transformar la ecuación $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0$, efectuando el cambio de variables $x = u + v$, $y = u - v$.
Solución. en la nueva ecuación $G$ dependerá de $u$, $v$; a su vez por el cambio de variables $u$, $v$ depende de $x$, $y$. Debemos expresar cada término de la ecuación dada en función de las nuevas variables $u$, $v$. Del diagrama 3 y aplicando la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \qquad (3)$$

Para hallar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ podríamos despejar $u$, $v$ delas ecuaciones que dan el cambio de variable y proceder como en el ejercicio anterior; sin embargo es mejor tratarla como función implícita. Derivando el sistema con respecto a $x$:

$$\begin{aligned} x &= u + v \\ y &= u - v \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

resolviendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Derivando con respecto a $y$:

$$\begin{aligned} x &= u + v \\ y &= u - v \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ 1 &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

resolviendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Reemplazando en (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} \end{aligned}$$

Al derivar nuevamente estas últimas expresiones debemos tener en cuenta que las derivadas parciales $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial y}$ dependen (al igual que $G$) de las varialbes $u$, $v$; que a su ez dependen de $x$, $y$. Derivando tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 G}{\partial v^2} \qquad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 G}{\partial v^2} \qquad (5)
\end{aligned}$$

De donde, reemplazando en la ecuación original y simplificando obtenemos:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = 0$$

4. Mostrar que $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0$ se transforma en $\frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u} = 0$, efectuando el cambio de variables $x = u + v$, $y = u - v$.
Solución. Restando (5) de (4), del ejercicio anterior, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0$$

entonces

$$\left(\frac{1}{4}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\right) - \left(\frac{1}{4}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\right) = 0$$

simplificando:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u} = 0$$

5. Mostrar que si en la ecuación $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$ se efectúa el cambio de variables $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, cambio a coordenadas polares, se obtiene

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = 0$$

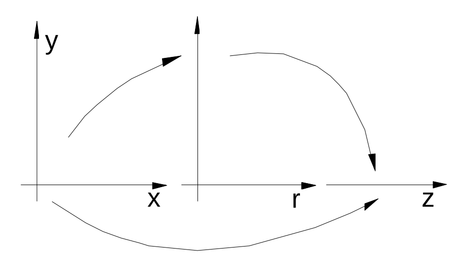



Fig. 5.7

Solución. En la nueva ecuación $z$ depende de $r$, $\theta$; a su vez $r$, $\theta$ depende de $x$, $y$ por el cambio de variables. Debemos expresar cada término de la primera ecuación en función de las nuevas variables $r$, $\theta$. Del diagrama 4 y aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned} \qquad (6)$$

Derivando el sistema, que da el cambio de variable, con respecto a $x$:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 1 &= \frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta - r\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial r}{\partial x}\sin\theta + r\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned}$$

resolviendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \cos\theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\sin\theta}{r} \end{aligned}$$

Derivando con respecto a $y$:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial r}{\partial y}\cos\theta - r\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ 1 &= \frac{\partial r}{\partial y}\sin\theta + r\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned}$$

resolviendo

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \sin\theta$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos\theta}{r}$$

Reemplazando en (6):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

sustituyendo estas últimas expresiones en la ecuación original:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$$

entonces

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right) = 0$$

desarrollando y simplificando:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\cos^2\theta - 2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\frac{2\sin\theta}{r^2} +$$
$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\sin^2\theta + 2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\frac{2\cos^2\theta}{r^2} = 0$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{r^2}\right) = 0$$

entonces

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = 0$$

6. Transformar la ecuación bidimensional de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

pasando a coordenadas polares.
Solución. Al pasar a coordenadas polares se tiene $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Del anterior ejercicio tenemos: $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$, $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta$, $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

Al derivar nuevamente las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ debemos tener en cuenta que tanto $\frac{\partial z}{\partial x}$ como $\frac{\partial z}{\partial y}$, lo mismo que $z$, depende de $r$, $\theta$; que a su vez dependen de $x$, $y$. Derivando:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\cos\theta - \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r^2}\right)\cos\theta +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial r}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta - \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\frac{\sin\theta}{r} - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\sin\theta +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial r}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\frac{\cos\theta}{r} - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)$$

(Notemos que algunos términos se han derivado como producto, por ejemplo

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)\sin\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta) = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial r}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta)$$

Finalmente, reemplazando en la ecuación de Laplace dada y después de simplificar obtenemos:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} = 0$$

**PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL**

7. Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9$ en el punto $(2, -1, 1)$.

Solución. Con $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ tenemos $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2x, 4y, 6z)$. El gradiente en $(2, -1, 1)$ es $\nabla f = (4, -4, 6)$. Por tanto, la ecuación del plano pedido es

$$4(x-2) - 4(y+1) + 6(z-1) = 0 \;\text{ ó }\; 2x - 2y + 3z = 9$$

La ecuación de la recta normal pedida es

$$X = (2, -1, 1) + t\,(4, -4, 6)$$

ó

$$\begin{aligned} x &= 2 + 4t \\ y &= -1 - 4t \\ z &= 1 + 6t \end{aligned}$$

8. Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie $xy + yz = 2xz$ en el punto $(1, 1, 1)$.
Solución. Conviene escribir $xy + yz - 2xz = 0$, entonces con $f(x, y, z) = xy + yz - 2xz$, tenemos

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x} . \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z} \right) = (y - 2z, x + z, y - 2x)$$

El gradiente en el punto $(1, 1, 1)$ es: $\nabla f = (-1, 2, -1)$. Por tanto, la ecuación del plano tangente pedido es:

$$-1\,(x - 1) + 2\,(y - 1) - 1\,(z - 1) = 0$$

ó

$$x - 2y + z = 0$$

La ecuación de la recta normal pedida es:

$$X = (1, 1, 1) + t\,(-1, 2, -1)$$

ó

$$\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 1 + 2t \\ z &= 1 - t \end{aligned}$$

9. Mostrar que la ecuación del plano tangente a la cuádrica $ax^2 + by^2 + cz^2 = d$ en el punto $(x_0, y_0, z_0)$ está dada por $ax_0x + by_0y + cz_0z = d$.
Solución. Con $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ tenemos $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x} . \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z} \right) = (2ax, 2by, 2cz)$. El gradiente en $(x_0, y_0, z_0)$ es: $\nabla f = (2ax_0, 2by_0, 2cz_0)$. Por tanto, la ecuación del plano tangente es

$$2ax_0\,(x - x_0) + 2by_0\,(y - y_0) + 2cz_0\,(z - z_0) = 0$$

dividiendo entre dos y agrupando:

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2$$

pero $ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 = d$, por ser $(x_0, y_0, z_0)$ un punto de la superficie. Luego

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = d$$

**Nota**. Entonces, la ecuación del plano tangente a la cuádrica en el punto dado se obtiene reemplazando las coordenadas del punto dado en la ecuación "desdoblada" de la cuádrica:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = d \Rightarrow axx + byy + czz = d \Rightarrow ax_0x + by_0y + cz_0z = d$$

10. Aplicar el ejercicio anterior para hallar la ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9$ en el punto $(2, -1, 1)$.
Solución. Desdoblando los cuadrados y reemplazando las coordenadas de $(2, -1, 1)$ tenemos que la ecuación del plano tangente pedido es:

$$x_0x + 2y_0y + 3z_0z = 9 \Rightarrow 2x - 2y + 3z = 9$$

(ver ejercicio 7).

11. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva formada por la intersección de las superficies $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$, $z = e^{x-y}$ en el punto $(1, 1, 1)$.
Solución. La intersección de los planos tangentes a las dos superficies da la recta tangente pedida.
El plano tangente a $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ en $(1, 1, 1)$ es:

$$\begin{aligned} (1)\,x + (1)\,y + 2\,(1)\,z &= 4 \\ x + y + 2z &= 4 \qquad (7) \end{aligned}$$

Por otra parte, con $f(x, y, z) = z - e^{x-y}$ se tiene $\nabla f = (-e^{x-y}, e^{x-y}, 1)$ y el gradiente en $(1, 1, 1)$ es $(-1, 1, 1)$; por tanto, la ecuación del plano tangente a $z = e^{x-y}$ en $(1, 1, 1)$ es:

$$\begin{aligned} (-1)\,(x-1) + (y-1) + (z-1) &= 0 \\ x - y - z &= -1 \qquad (8) \end{aligned}$$

De (7) y (8), intersectando los dos planos obtenemos la recta tangente pedida. Expresando todas las variables en función de una de ellas:

$$\begin{matrix} x + y + 2z = 4 \\ x - y - z = -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x + z = 3 \\ y = x - z + 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{3}{2} - \frac{z}{2} \\ y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}z \end{matrix}$$

Usando el parámetro $t$, cambiamos $z$ por $t$, la recta pedida es

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} - \frac{t}{2} \\ y &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}t \\ z &= t \end{aligned}$$

12. Mostrar que las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 18$, $xy = 9$ son tangentes en $(3, 3, 0)$.
Solución. Debemos mostrar que en el punto $(3, 3, 0)$ las dos superfiies tienen el mismo plano tangente. El plano tangente a la esfera $x^2+y^2+z^2 = 18$ en $(3, 3, 0)$ es:
$$\begin{aligned} &3x + 3y + 0z = 18 \quad \text{ó} \\ &x + y = 6 \end{aligned} \qquad (9)$$
Con $f(x, y, z) = xy$, tenemos $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z}\right) = (y, x, 0)$ y el gradiente en $(3, 3, 0)$ es $\nabla f = (3, 3, 0)$. Por tanto, el plano tangente a $xy = 9$ en $(3, 3, 0)$ es:
$$\begin{gathered} 3(x-3) + 3(y-3) + 0(z-0) = 0 \quad \text{ó} \\ x + y = 6 \end{gathered} \qquad (10)$$
De (9) y (10) se deduce que ambas superficies tienen el mismo plano tangente en el punto $(3, 3, 0)$ y, por tanto, son tangentes en dicho punto.

13. Mostrar que las superficies $3x^2 + 4y^2 + 8z^2 = 36$, $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 6$ se cortan perpendicularmente.
Solución. Vamos a mostrar que los respectivos planos tangentes se cortan perpendicularmente. Considerando un punto $(x_0, y_0, z_0)$ de la intersección de las dos superficies cuádricas. Del ejercicio 9, los repectivos planos tangentes a las superficies $3x^2 + 4y^2 + 8z^2 = 36$, $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 6$ en $(x_0, y_0, z_0)$ son
$$\begin{aligned} &3x_0x + 4y_0y + 8z_0z = 36 \\ &x_0x + 2y_0y - 4z_0z = 6 \end{aligned} \qquad (11)$$
Una normal al primer plano es $N_1 = (3x_0, 4y_0, 8z_0)$, mientras que una normal al segundo plano es $N_2 = (x_0, 2y_0, -4z_0)$. Como
$$\begin{aligned} N_1 \circ N_2 = (3x_0, 4y_0, 8z_0) \circ (x_0, 2y_0 - 4z_0) &= 3x_0^2 + 8y_0^2 - 32z_0^2 \\ &= 6\left(x_0^2, 2y_0^2 - 4z_0^2\right) - \left(3x_0^2 + 4y_0^2 + 8z_0^2\right) \\ &= 6(6) - 36 = 0 \qquad (\text{de } 11) \end{aligned}$$
Esto dice que las normales a los dos planos son perpendiculares y, por tanto, estos planos son perpendiculares. Esto muestra que las dos superficies dadas se cortan perpendicularmente en todo punto donde se intersectan.

14. Mostrar que la suma de los segmentos interceptados sobre los ejes coordenados por el plano tangente a la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$, en cualquiera de sus puntos, es igual a $a$.
Solución. Tomemos un punto cualquiera $(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie. Con

$f(x,y,z) = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$, tenemos $\nabla f = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{1}{2\sqrt{z}}\right)$ y el gradiente en $(x_0, y_0, z_0)$ es: $\nabla f = \left(\frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \frac{1}{2\sqrt{y_0}}, \frac{1}{2\sqrt{z_0}}\right)$. Por tanto, el plano tangente en $(x_0, y_0, z_0)$ es:

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0)$$

Las intercepciones del plano tangente con los ejes $x, y, z$ son: Con el eje $x$:

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) - \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y_0) - \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z_0) = 0$$

hicimos $y = z = 0$

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} - (\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} - \sqrt{a} = 0$$

$$x = \sqrt{ax_0}$$

(Por estar $(x_0, y_0, z_0)$ sobre la superficie).
Con el eje $y$: $y = \sqrt{ay_0}$ (procediendo como para el eje $x$).
Con el eje $z$: $z = \sqrt{az_0}$.
Sumando y teniendo en cuenta que $(x_0, y_0, z_0)$ está en la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$:

$$\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = \sqrt{a}\,(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = \sqrt{a}\sqrt{a} = a$$

15. Mostrar que toda recta normal a una esfera pasa por el centro.
Solución. Es suficiente considerar que la esfera centrada en el origen de radio $R$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Considerando un punto cualquiera $(x_0, y_0, z_0)$ de dicha esfera. Con $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, tenemos $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$. El gradiente en $(x_0, y_0, z_0)$ es $\nabla f = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$ es:

$$X = (x_0, y_0, z_0) + t\,(2x_0, 2y_0, 2z_0)$$

Tomando $t = -\frac{1}{2}$ vemos que esta recta pasa por el origen $(0, 0, 0)$, que es el centro de la esfera.

16. Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ y paralelo al plano $x + 4y + 6z = 0$.
Solución. Dos planos paralelos tienen sus normales paralelas. El plano tangente a $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ en un punto $(x_0, y_0, z_0)$ es $x_0x + 2y_0y +$

$3z_0z = 21$ y una normal a este plano es $N_1 = (x_0, 2y_0, 3z_0)$. Por otra parte, una normal al plano dado $x + 4y + 6z = 0$ es: $N_2 = (1, 4, 6)$. Las normales $N_1$, $N_2$ son paralelas si $N_1 = kN_2$, $k$ constante. Es decir $(x_0, 2y_0, 3z_0) = k\,(1, 4, 6)$. Igualando componentes y considerando que $(x_0, y_0, z_0)$ está en $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, obtenemos el sistema:

$$\begin{matrix} x_0 = k \\ 3z_0 = 6k \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 2y_0 = 4k \\ x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21 \end{matrix} \Rightarrow k^2 + 2\,(2k)^2 + 3\,(2k)^2 = 21 \Rightarrow \begin{matrix} k^2 = 1 \\ k = \pm 1 \end{matrix}$$

Luego, hay dos soluciones: Si $k = 1$, obtenemos $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 2)$ y, por tanto, una primera solución es: $x + 4 + 6z = -21$. Si $k = -1$, obtenemos $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -2, -2)$ y, por tanto, una segunda solución es: $-x - 4y - 6z = 21$ ó $x + 4y + 6z = -21$.

17. Mostrar que el vector gradiente en $X_0$: $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x} . \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial z}{\partial z}\right)$, es perpendicular al plano tangente a la superficie $f\,(x, y, z) = c$ en $X_0$.

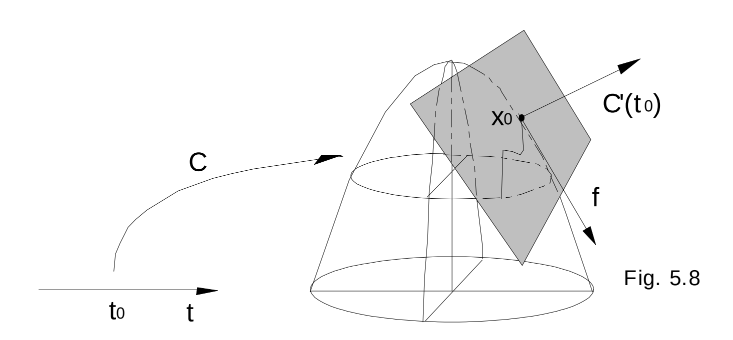


Fig. 5.8

Solución. Consideremos una curva $C$ sobre la superficie y tal que pasa por $(x_0, y_0, z_0)$. Sea $C\,(t) = (x\,(t)\,, y\,(t)\,, z\,(t))$ la ecuación paramétrica de dicha curva; como pasa por $(x_0, y_0, z_0)$ hay un punto tal que $C\,(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Sobre la curva $C$, $f\,(x, y, z) = c$ se expresa como

$$f\,(x\,(t)\,, y\,(t)\,, z\,(t)) = c \qquad (12)$$

Derivando la ecuación 12 con respecto a $t$, en $t_0$, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

ó

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} . \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z}\right) \circ (x'\,(t_0)\,, y'\,(t_0)\,, z'\,(t_0)) = 0 \qquad (13)$$

donde $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x} . \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial z}{\partial z}\right)$ se evalúa en $(x_0, y_0, z_0)$.
El vector $C'\,(t_0) = (x'\,(t_0)\,, y'\,(t_0)\,, z'\,(t_0))$ es tangente a la curva en $(x_0, y_0, z_0)$

y, por tanto, (13) dice que el gradiente en $X_0$, $\nabla f$, es perpendicular al fector tangente a la curva $C$ en $(x_0, y_0, z_0)$. Esto muestra que el vector gradiente en $X_0$ es perpendicular a los vectores tangentes a las curvas sobre la superficie que pasan por $(x_0, y_0, z_0)$. Al plano que determina estos vectores se llama plano tangente a la superficie en $(x_0, y_0, z_0)$. Luego el gradiente en $(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular al plano tangente a la superficie en $(x_0, y_0, z_0)$.

**DERIVADAS DIRECCIONALES**

18. Calcular la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 - xy, y^2$, en el punto $(1, -2)$ en la dirección del vector $\mathbf{V}(3, 4)$.
Solución. Como $\nabla f = (2x - y, -x + 2y)$, en el punto $(1, -2)$ tenemos $\nabla f = (4, -5)$. La derivada direccional pedida es:
$$\nabla_{\mathbf{V}} f = \nabla f \circ \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} - (4, -5) \circ \frac{(3, 4)}{5} = -\frac{8}{5}$$

19. Calcular la derivada direccional de $f(x, y, z) = 3x^2 - yz + z^2$ en el punto $(1, 2, -1)$ en la dirección del vector $\mathbf{V}(2, -1, 2)$.
Solución. Como $\nabla f = (6x, -z, -y + 2z)$; en el punto $(1, 2, -1)$ tenemos $\nabla f = (6, 1, -4)$. La derivada direccional pedida es:
$$\nabla_{\mathbf{V}} f = (6, 1, -4) \circ \frac{(2, -1, 2)}{3} = 1$$

20. Hallar la derivada direcciona de $F = x^2 y z^3$ a lo largo de la cúbica $f(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$ en el punto $(1, 1, 1)$.
Solución. Como $f'(t) = \left(1, 2t, 3t^2\right)$, un vector tangente a la cúbica en el punto $(1, 1, 1)$ es $f'(1) = (1, 2, 3)$. Además, el gradiente de $F$ en $(1, 1, 1)$ es $\nabla f = \left(2xyz^3, x^2 z^2, 3x^2 y z^2\right) = (2, 1, 3)$. Por tanto, la derivada direccional pedida es:
$$(2, 1, 3) \circ \frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{13}{14}}$$

21. Si $f(x, y, z) = 3x^2 - yz$, ¿en qué dirección la derivada direccional de $f$ en el punto $(1, -1, 3)$ es a) máxima?, b) mínima?, c) calcular dichos valores.
Solución. a) La máxima derivada direccional en el punto $(1, -1, 3)$ se obtiene en la dirección del vector gradiente de $f$ en $(1, -1, 3)$: $\nabla f = (6x, -z, -y) = (6, -3, 1)$.
b) La mínima derivada direccional en el punto $(1, -1, 3)$ se obtiene en la dirección del vector $-\nabla f = (-6, 3, -1)$.
c) El máximo y mínimo valor de las derivadas direccionales anteriores son, respectivamente, $|\nabla f| = \sqrt{46}$ y $-|\nabla f| = -\sqrt{46}$.

22. Si la temperatura $T$ en un punto $(x, y, z)$ está dada por $T(x, y, z) = x + y^2 + z^4$, ¿en qué dirección la temperatura en el punto $(1, 2, 1)$ a) aumenta con mayor rapidez?, b) disminuye con mayor rapidez?, c) si la temperatura

se mide en grados y la distancia en metros calcular dichos valores.
Solución. a) La temperatura en el punto $(1,2,1)$ aumenta con mayor rapidez en la dirección del vector $\nabla T = \left(1, 2y, 4z^3\right) = (1,4,4)$.
b) La temperatura en el punto $(1,2,1)$ disminuye más rápidamente en la dirección del vector $-\nabla T = (-1,-4,-4)$.
c) El máximo aumento de temperatura es a razón de $|\nabla T| = 33$ grad/m., y la máxima disminución a razón de $-|\nabla T| = -33$ grad/m.

23. Hallar los valores de las constantes $a, b, c$ tales que la derivada direccional de $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en el punto $(1,2,-1)$ tenga el valor máximo 64 y la dirección paralela al eje $z$.
Solución. Como la derivada direccional en el punto $(1,2,-1)$ es máxima en la dirección del gradiente de $f$ en dicho punto, el vector $\nabla f = \left(ay^2 + 3cz^2x^2, 2axy + bz, by + 2czx^3\right) = (4a + 3c, 4a - b, 2b - 2c)$ debe ser paralelo al eje $z$. Esto ocurre si

$$4a + 3c = 0,\; 4a - b = 0 \qquad (14)$$

Por otra parte, dicha máxima derivada direccional debe ser 64; es decir

$$(4a + 3c, 4a - b, 2b - 2c) \circ (0,0,1) = 64$$

de donde

$$\begin{array}{l} 2b - 2c = 64 \\ b - c = 32 \end{array} \qquad (15)$$

Resolviendo el sistema formado por (14) y (15) obtenemos los valores de $a$, $b$ y $c$:

$$\begin{array}{rcl} 4a \quad\; + 3c &=& 0 \\ 4a - b \qquad &=& 0 \\ b - \;\; c &=& 32 \end{array}$$

resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} a &= 6 \\ b &= 24 \\ c &= -8 \end{aligned}$$

(Se ha considerado la dirección positiva del eje $z$ dada por $(0,0,1)$, si se considera la dirección negativa dada por $(0,0,-1)$ se obtiene $a = -6$, $b = -24$, $c = 8$.

24. Mostrar que la derivada direccional de $f(x,y,z)$ en $X_0$ en la dirección del vector $\mathbf{V}$ está dado por

$$\nabla_{\mathbf{V}} f(X_0) = \nabla f(X_0) \circ \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|}$$

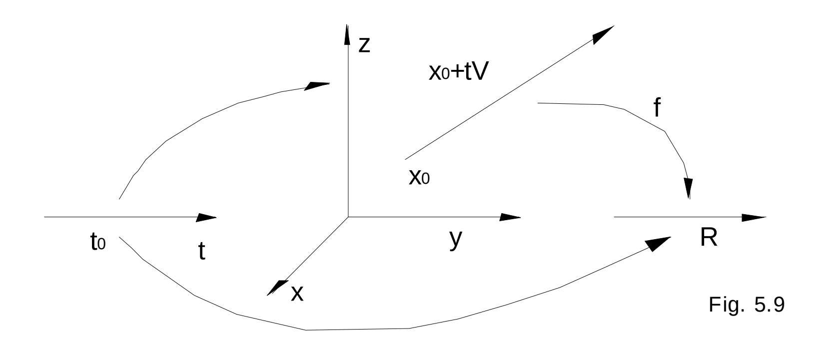


Fig. 5.9

Solución. Supongamos que el vector $\mathbf{V}$ es unitario. Entonces, por definición

$$\nabla_{\mathbf{V}} f(X_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(X_0 + t\mathbf{V}) - f(X_0)}{t} \qquad (15)$$

Sean $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$. Notemos que el segundo miembro de (15) es la definición de la derivada en $t = 0$ de la composición de la función que a cada $t$ asigna el vector $X_0 + t\mathbf{V}$ (es decir $x = x_0 + tv_1$, $y = y_0 + tv_2$, $z = z_0 + tv_3$) y la función $f(x, y, z)$. Teniendo en cuenta el diagrama 5 y aplicando la regla de la cadena para derivar $f$ con respecto a $t$ en $t = 0$, obtenemos:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(X_0 + t\mathbf{V}) - f(X_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}v_2 + \frac{\partial f}{\partial z}v_3$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \circ (v_1, v_2, v_3) \qquad (16)$$

donde todas las derivadas parciales anteriores se evalúan en $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Por tanto, el segundo miembro de (16) se expresa como $\nabla f(X_0) \circ \mathbf{V}$. Luego;

$$\nabla_{\mathbf{V}} f(X_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(X_0 + t\mathbf{V}) - f(X_0)}{t} = \nabla f(X_0) \circ \mathbf{V} \qquad (17)$$

En general, si $\mathbf{V}$ no es unitario, se considera el vector unitario $\dfrac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|}$ (que obviamente tiene la misma dirección que $\mathbf{V}$) y procediendo como antes la ecuación (17) se transforma en la fórmula pedida:

$$\nabla_{\mathbf{V}} f(X_0) = \nabla f(X_0) \circ \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|}$$

25. Mostrar que la máxima derivada direccional de $f(x, y, z)$ en un punto se obtiene en la dirección del gradiente de $f$, $\nabla f$, en dicho punto. Calcular tal valor.
Solución. Puesto que la derivada direccional de $f$ en un punto en la

dirección de un vector **V** es la componente del gradiente de $f$, $\nabla f$, en dicho punto es la componente en la dirección de **V**; tal componente es máxima si $\nabla f$ tiene la misma dirección que **V** (ver Fig. ###). Por tanto la máxima derivada direccional de $f$ se obtiene en la dirección de $\nabla f$. Su valor es:

$$\nabla f \circ \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{|\nabla f|^2}{|\nabla f|} = |\nabla f|$$

**MAXIMOS Y MINIMOS**

26. Hallar los máximos y mínimos relativos de $f(x,y) = x^2+4xy-y^2-8x-6y$.
Solución. Primeramente determinaremos los puntos críticos resolviendo el sistema:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x+4y-8=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x-2y-6=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array} \Rightarrow (2,1) \text{ es punto crítico.}$$

Enseguida determinamos la naturaleza de este punto crítico. Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4$; entonces $\Delta = (2)(-2) - (4)^2 = -20$. Por ser $\Delta < 0$, la función no tiene máximos ni mínimos relativos; el punto $(2,1)$ es punto de silla.

27. Hallar los máximos y mínimos relativos de $f(x,y) = x^3+y^3-3x-3y+20$.
Solución. Primeramente determinamos los puntos críticos resolviendo el sistema:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-3=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2-3=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x=\pm 1 \\ y=\pm 1 \end{array}$$

Los puntos críticos son $P_1(1,1)$, $P_2(1,-1)$, $P_3(-1,1)$ y $P_4(-1,-1)$. En seguida determinamos la naturaleza de estos puntos críticos. Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$.

Para $P_1(1,1)$ tenemos $\Delta = (6)(6) - 0^2 = 36 > 0$ y como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 > 0$, en $P_1(1,1)$ hay mínimo relativo.
Para $P_2(1,-1)$ tenemos $\Delta = (6)(-6) - 0^2 = -36 < 0$. Por tanto, en $P_2(1,-1)$ no hay máximo ni mínimo; es punto de silla.
Para $P_3(-1,1)$ no tenemos $\Delta = (-6)(6) - 0^2 = -36 > 0$. Por tanto, en $P_3(-1,1)$ no hay máximo ni mínimo; es punto silla.
Para $P_4(-1,-1)$ tenemos $\Delta = (-6)(-6) - 0^2 = 36 > 0$ y como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6 < 0$; en $P_4(-1,-1)$ hay máximo relativo.

28. Hallar los máximos y mínimos relativos de $f(x,y) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right)$.
Solución. Primeramente determinamos los puntos críticos resolviendo el sistema:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right) + e^{x-y}(2x) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right) + e^{x-y}(-4y) = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} e^{x-y}\left(x^2 + 2x - 2y^2\right) = 0 \\ e^{x-y}\left(-x^2 + 2y^2 - 4y\right) = 0 \end{array}$$

Como $e^{x-y} \neq 0$, el anterior sistema se reduce a

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x - 2y^2 = 0 \\ -x^2 + 2y^2 - 4y = 0 \end{array} \Rightarrow 2x - 4y = 0 \Rightarrow x = 2y$$

Reemplazando en la primera ecuación: $4y^2 + 4y - 2y^2 = 0 \Rightarrow 2y(y+2) = 0$ de donde $y = 0$, $y = -2$. Con $y = 0$, $x = 0$; con $y = -2$, $x = -4$.
Por tanto, los puntos críticos son $P_1(0,0)$, $P_2(-4,-2)$. Enseguida determinamos la naturaleza de estos puntos críticos. Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x-y}\left(x^2 + 2x - 2y^2\right) + e^{x-y}(2x+2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{x-y}\left(-x^2 + 2y^2 - 4y\right) + e^{x-y}(4y-4)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{x-y}\left(x^2 + 2x - 2y^2\right) + e^{x-y}(-4y)$.
Para $P_1(0,0)$ tenemos: $\Delta = (2)(-4) - 0^2 = -8 < 0$ entonces en $(0,0)$ hay punto silla.
Para $P_2(-4,-2)$ tenemos $\Delta = \left(-6e^{-2}\right)\left(-12e^{-2}\right) - \left(8e^{-2}\right)^2 = 8e^{-4} > 0$ y como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6e^{-2} < 0$, en $P_2(-4,-2)$ hay máximo relativo.

29. Hallar los máximos y mínimos relativos de $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ con $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$.
Solución. Primeramente determinamos los puntos críticos resolviendo el sistema:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos x + \cos(x+y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \cos y + \cos(x+y) = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos(x+y) = -\cos x \\ \cos(x+y) = -\cos y \end{array} \Rightarrow \cos x = \cos y$$

Teniendo en cuenta que $x, y$ están entre 0 y $\dfrac{\pi}{2}$, de la última igualdad tenemos: $x = y$, reemplazando: $\cos(2x) = -\cos x = \cos(\pi - x)$ de donde $2x = \pi - x$ (por estar $x, y$ entre 0 y $\dfrac{\pi}{2}$), $x = \dfrac{\pi}{3}$, $y = \dfrac{\pi}{3}$ entonces $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ es punto crítico.
Enseguida determinamos la naturaleza de este punto crítico. Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x - \sin(x+y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin y - \sin(x+y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\sin(x+y)$; en

$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ tenemos $\Delta = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = 6 > 0$

y como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4} < 0$, en $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ hay máximo relativo.

30. Encontrar los extremos de $z$ sobre la superficie $x^2+4xy+z^2=4$.
Solución. La ecuación de la superficie define a $z$ como función implicita de $x$, $y$. Primeramente determinaremos los puntos críticos, para ello necesitamos las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. Derivando con respecto a $x$ (teniendo en cuenta que $z$ depende de $x$, que $y$ es independiente de $x$):

$$x^2+4xy+z^2=4 \Rightarrow 2x+4y+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x+2y}{z}$$

Derivando con respecto a $y$:

$$x^2+4xy+z^2=4 \Rightarrow 4x+2z\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{z}$$

igualando a cero ambas derivadas parciales obtenemos los puntos críticos:

$$\begin{array}{l}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x+2y}{z}\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{z}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{r}x+2y=0\\ 2x=0\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}$$

Cuando $x=0$, $y=0$, de la ecuación de la superficie tenemos que $z=\pm 2$; entonces debemos analizar en los puntos $(0,0,2)$ y $(0,0,-2)$. Enseguida determinamos la naturaleza de estos puntos, para ello necesitamos las segundas derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x+2y}{z}\right)=-\frac{z\,(1)-(x+2y)\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}=-\frac{z-(x+2y)\left(\frac{x+2y}{z}\right)}{z^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2x}{z}\right)=\frac{2x\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{z^2}=\frac{2x}{z^2}\left(-\frac{2x}{z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x+2y}{z}\right)=-\frac{z\,(2)-(x+2y)\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}=-\frac{2z-(x+2y)\left(-\frac{2x}{z}\right)}{z^2}$$

Evaluando en las segundas derivadas parciales en $P_1\,(0,0,2)$ tenemos: $\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)(0)-(-1)^2=-1<0$. Por tanto, en $(0,0,2)$ no hay máximo ni mínimo, hay punto silla.
Evaluando en $(0,0,-2)$ tenemos $\Delta=\left(\frac{1}{2}\right)(0)-(1)^2=-1<0$ entonces en $(0,0,-2)$ tampoco hay mínimo ni máximo, hay punto silla.

31. Hallar los máximos y mínimos relativos de $f(x,y) = (x-y)(1-xy)$.

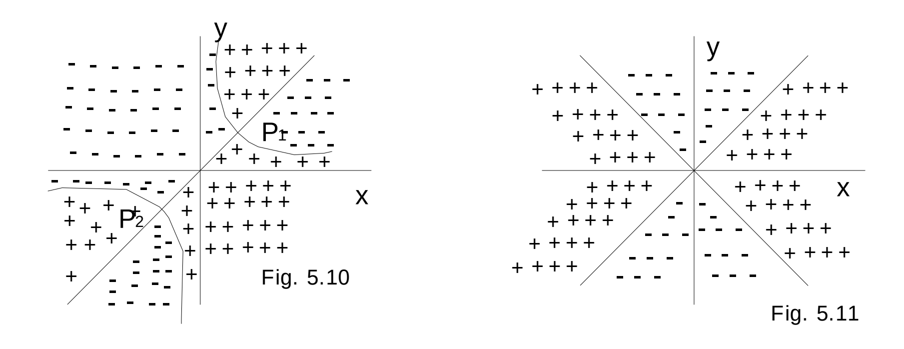



Fig. 5.10 Fig. 5.11

Solución. Conviene hacer $f(x,y) = (x-y)(1-xy) = -x^2y+x-y+xy^2$. Primeramente determinamos los puntos críticos resolviendo el sistema:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 1 + y^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -x^2 - 1 + 2xy = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = \dfrac{1+y^2}{2y} \\ -\dfrac{\left(1+y^2\right)^2}{4y^2} - 1 + \left(1+y^2\right) = 0 \end{array}$$

(donde se ha despejado $x$ en la primera ecuación y reemplazando en la segunda).
Simplificando en la última ecuación tenemos: $3y^4 - 2y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = \dfrac{1 \pm 2}{3} \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$. Con $y = 1$, $x = 1$; con $x = -1$, $y = -1$; por tanto los puntos críticos son $P_1(1,1)$; $P_2(-1,-1)$.
Enseguida determinamos la naturaleza de estos puntos críticos. Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2x$.
Para $P_1(1,1)$ tenemos: $\Delta = (-2)(2) - (-2)^2 = 0$.
Para $P_2(-1,-1)$ tenemos $\Delta = (2)(-2) - (2)^2 = 0$.
Lamentablemente al ser $\Delta = 0$, no podemos afirmar nada sobre la naturaleza de los puntos críticos $P_1(1,1)$ y $P_2(-1,-1)$. Debemos hacer un estudio más detenido de la función alrededor de estos puntos.
Vamos a determinar las regiones del plano $xy$ donde la función toma valores positivos y las regiones donde toma valores negativos:

$$f(x,y) = (x-y)(1-xy) > 0 \text{ si } \begin{array}{l} x-y > 0,\ 1-xy > 0 \\ \text{ó} \\ x-y < 0,\ 1-xy < 0 \end{array}$$

$$f(x,y) = (x-y)(1-xy) > 0 \text{ si } \begin{array}{l} x-y < 0,\ 1-xy > 0 \\ \text{ó} \\ x-y > 0,\ 1-xy < 0 \end{array}$$

En la Fig. ### se ha señalado con + las regiones donde la función es positiva y con − donde es negativa. Evidentemente sobre la recta $x-y=0$ y la hipérbola $1-xy=0$ la función se anula. Por tanto teniendo en cuenta que en $P_1(1,1)$ y $P_2(-1,-1)$ la función se anula y alrededor toma tanto valores positivos como negativos, vemos que en estos puntos no hay máximo ni mínimo relativos. Ambos puntos son puntos de silla.

32. Mostrar con un ejemplo que cuando $\Delta = 0$ en un punto crítico, en dicho punto puede haber a) mínimo, b) máximo ó c) punto silla.
Solución. a) Sea $f(x,y) = x^4 + y^4$. Del sistema $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$; tenemos que $(0,0)$ es un punto crítico. Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$, en $(0,0)$ vemos que $\Delta = (0)(0) - 0^2 = 0$. Sin embargo, observando que $f(x,y) = x^4 + y^4 > 0$ para $(x,y) \neq (0,0)$, deducimos que en $(0,0)$ hay mínimo (en este caso absoluto).
b) Sea $f(x,y) = -\left(x^4 + y^4\right)$. Procediendo como antes se ve que $(0,0)$ es un punto crítico y, además, en este punto $\Delta = 0$. Observando que $f(x,y) = -\left(x^4 + y^4\right) < 0$ para $(x,y) \neq (0,0)$ deducimos que en $(0,0)$ hay máximo (en este caso absoluto).
c) Sea $f(x,y) = x^4 - y^4$. Expresando $f(x,y) = x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)\left(x^2+y^2\right)$ y procediendo como en el ejercicio anterior vemos que la función se anula en el origen $(0,0)$ y toma valores positivos y negativos alrededor de este punto. Por tanto el punto $(0,0)$ es un punto silla (ver Fig. ###).

33. Mostrar que es necesario que las primeras derivadas parciales de $f(x,y)$ se anulen en $(x_0,y_0)$ para que $f$ tenga un máximo o mínimo relativo en $(x_0,y_0)$. Es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \qquad (1)$$

Solución. Si $f(x,y)$ tiene un máximo o mínimo relativo en $(x_0,y_0)$, en particular, manteniendo $y_0$ constante; $f(x_0,y_0)$ tiene un máximo o mínimo en $(x_0,y_0)$. Por lo visto en el Cálculo I para funciones de una variable, para que $f(x_0,y_0)$ tenga un máximo o mínimo relativo en $(x_0,y_0)$. Por tanto, $f(x,y)$ tiene máximo o mínimo relativo en $(x_0,y_0)$ si se cumple (1).

34. Mostrar que $f$ tiene un máximo relativo en $(x_0,y_0)$ si $f_x = 0$, $f_y = 0$, $\Delta = (f_{xx})(f_{yy}) - (f_{xy})^2 > 0$ y $f_{xx} < 0$, donde todas las derivadas parciales se evalúan en $(x_0,y_0)$ y son continuas.
Solución. Por el teorema de Taylor tenemos

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0,y_0) + hf_x(x_0,y_0) + kf_y(x_0,y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + hk f_{xy} + k^2 f_{yy}\right) \quad (17) \end{aligned}$$

donde las segundas derivadas parciales se evalúan en algún punto $(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$, $0 < \theta < 1$, que se encuentra en el segmento de recta que une los puntos $(x_0, y_0)$ y $(x_0 + h, y_0 + k)$.
Por el Ejercicio 33, si $f$ tiene máximo o mínimo relativo en $(x_0, y_0)$; $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$ y (17) se reduce a

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + hk f_{xy} + k^2 f_{yy}\right) \qquad (18)$$

Factorizando $f_{xx}$ y completando cuadrados en (18) obtenemos

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} f_{xx}\left\{\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2 + \left(\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}^2}\right)k^2\right\} \qquad (19)$$

Por hipótesis $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ cuando las derivadas parciales se evalúan en $(x_0, y_0)$, pero por la continuidad de dichas derivadas parciales, para $h$, $k$ suficientemente pequeños, la desigualdad se mantiene cuando se evalúa en $(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$ y, por tanto, el signo del segundo miembro de (19) está determinado por el de $f_{xx}$. Como $f_{xx} < 0$ (por hipótesis) de (19) tenemos: $f(x_0 + h, y_0 + k) < f(x_0, y_0)$. Esto dice que $f$ tiene un máximo relativo en $(x_0, y_0)$.

**MAXIMOS Y MINIMOS CONDICIONADOS (Multiplicadores de Lagrange)**

35. Hallar los máximos y mínimos relativos de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeta a $\phi(x,y) = x - y + 1 = 0$.
Solución. Primeramente formamos la función auxiliar.

$$F = f + \lambda\phi = x^2 + y^2 + \lambda(x - y + 1)$$

Enseguida, hallamos los puntos críticos de $F$ (posibles máximos y mínimos de $F$ y, por tanto, de $f$ sujeta a $\phi = 0$) resolviendo el sistema:

$$\begin{array}{ll} F_x = f_x + \lambda\phi_x & = 2x + \lambda = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\phi_y & = 2y + \lambda(-1) = 0 \\ F_\lambda = \phi & = x - y + 1 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2(x + y) = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{array}$$

Entonces $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es punto crítico de $F$. Reemplazando $\lambda = 1$ en la función auxiliar $F = f + \lambda\phi$ obtenemos

$$F = x^2 + y^2 + x - y + 1$$

Calculamos las segundas derivadas parciales en el punto crítico $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{array}{l} F_x = 2x + 1 \\ F_y = 2y - 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} F_{xx} = 2 \\ F_{yy} = 2 \\ F_{xy} = 0 \end{array} \Rightarrow \Delta = (F_{xx})(F_{yy}) - (F_{xy})^2 = (2)(2) - 0^2 = 4 > 0$$

Como $F_{xx} = 2 > 0$, en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ hay mínimo relativo de $F$ y, por tanto, en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ hay mínimo relativo de $f$ sujeta a $\phi = 0$.

36. Sabiendo que existen los máximos y mínimos condicionados, hallar los máximos y mínimos relativos de $f(x,y) = x^2 - y^2$ restringido a $x^2 + y^2 = 1$.
Solución. Primeramente, con $\phi = x^2 + y^1 - 1 = 0$, formamos la función auxiliar.
$$F = f + \lambda\phi = x^2 - y^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$
Los puntos críticos de $F$ los obtenemos resolviendo el sistema:
$$\begin{array}{lll} F_x = 2x + \lambda(2x) = 0 & (\lambda + 1)x = 0 & (1) \\ F_y = -2y + \lambda(2y) = 0 & (\lambda - 1)y = 0 & (2) \\ F_\lambda = x + y^2 - 1 = 0 & x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{array}$$
De (1), si $x = 0$ y considerando (3) tenemos $y = \pm 1$; entonces $(0,1)$, $(0,-1)$ son puntos críticos de $F$. De (2), si $y = 0$ y considerando (3) tenemos $x = \pm 1$; entonces $(1,0)$, $(-1,0)$ son también puntos críticos de la función auxiliar $F$.
Notemos que de (1) y (2) podemos obtener $\lambda = \pm 1$ y reemplazando en $F = f + \lambda\phi$ averiguar la naturaleza de estos puntos críticos por medio de las segundas derivadas parciales. Sin embargo, la única información que obtenemos es que, al ser $\Delta < 0$, se trata de punto silla y, por tanto; no podemos decir nada todavía sobre $f$ sujeta.
Como sabemos que existen los máximos y mínimos relativos, evaluando $f$ en los puntos crítios tenemos:
$$f(0,1) = -1 \ , \ f(0,-1) = -1 \ , \ f(1,0) = 1 \ , \ f(-1,0) = 1$$
y comparando: $f$ sujeto a $\phi = 0$ tiene mínimo relativo en los puntos $(0,1)$, $(0,-1)$ y máximo relativo en $(1,0)$, $(-1,0)$.

37. Hallar los máximos y mínimos relativos de $f(x,y) = xy$ sujeto a $x - y = 0$.
Solución. Primeramente con $\phi(x,y) = x - y = 0$, formamos la función auxiliar
$$F = f + \lambda\phi = xy + \lambda(x - y)$$
Los puntos críticos de $F$ los obtenemos resolviendo el sistema:
$$\begin{array}{l} F_x = y + \lambda = 0 \\ F_y = x + \lambda(-1) = 0 \\ F_\lambda = x - y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = -y \\ \lambda = x \\ x = y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -y \\ x = y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda = 0 \end{array}$$
Entonces $(0,0)$ es un punto crítico de $F$. Reemplazando en $F = f + \lambda\phi$ y calculando las segundas derivadas parciales en el punto crítico $(0,0)$ tenemos:
$$F = xy \ \Rightarrow \begin{array}{l} F_x = y \\ F_y = x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} F_{xx} = 0 \\ F_{yy} = 0 \\ F_{xy} = 1 \end{array} \Rightarrow \Delta = (0)(0) - 1^1 = -1 < 0$$

Por tanto $F$ no tiene ni máximo ni mínimo en $(0,0)$, sin embargo; esto no nos dice nada respecto a la función $f$ sujeta a $\phi = 0$. Es necesario hacer un estudio más detenido:

$$\begin{array}{r} \text{De } f(x,y) = xy \\ x = y \end{array} \Rightarrow f = x^2$$

que evidentemente tiene un mínimo relativo en el punto $(0,0)$. Por tanto $f$ sujeto a $\phi = 0$ tiene mínimo relativo en $(0,0)$.

38. Hallar los máximos y mínimos de $f(x,y,z) = x + y + z$ sujeto a las condiciones restrictivas $x^2 + y^2 = 2$, $x + z = 1$.
Solución. Como hay dos condiciones, necesitamos dos multiplicadores de Lagrange. Con $\phi_1 = x^2 + y^2 - 2 = 0$; $\phi_2 = x + z - 1 = 0$ formamos la función auxiliar

$$F = f + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 = x + y + z + \lambda_1\left(x^2 + y^2 - 2\right) + \lambda_2(x + z - 1)$$

Los puntos críticos de $F$ los obtenemos del sistema:

$$\begin{array}{l} F_x = 1 + \lambda_1(2x) + \lambda_2 = 0 \\ F_y = 1 + \lambda_1(2y) + \lambda_2(0) = 0 \\ F_z = 1 + \lambda_1(0) + \lambda_2 = 0 \\ F_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ F_{\lambda_2} = x + z - 1 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x\lambda_1 = 0 \\ 2y\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ \lambda_1 \neq 0, \left(\lambda_1 = \dfrac{\pm 1}{2\sqrt{2}}\right) \\ \lambda_2 = -1 \\ y = \pm\sqrt{2} \\ z = 1 \end{array}$$

Entonces $\left(0, \sqrt{2}, 1\right)$, $\left(0, -\sqrt{2}, 1\right)$ son puntos críticos de $F$. Podríamos recurrir a las segundas derivadas parciales de $F$ para intentar examinar la naturaleza de estos puntos críticos. Sin embargo, notemos que geométricamente la función a maximizar es la suma de las coordenadas de los puntos de la curva (especie de elipse) determinada por la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2$ y el plano $x + z = 1$. Entonces es claro que la función tiene máximo y mínimo relativos. Por tanto, evaluando $f$ en los puntos críticos:

$$\begin{array}{l} f\left(0, \sqrt{2}, 1\right) = 1 + \sqrt{2} \\ f\left(0, -\sqrt{2}, 1\right) = 1 - \sqrt{2} \end{array}$$

entonces, comparando $f$ sujeto a $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0$ tiene un máximo relativo en $\left(0, \sqrt{2}, 1\right)$ y un mínimo relativo en $\left(0, -\sqrt{2}, 1\right)$.

39. Hallar la distancia más corta del punto $(2,-3,1)$ al plano $z = 2x + 5y - 3$.
Solución. La función a maximizar es la distancia de $(2,-3,1)$ a un punto $(x,y,z)$ del plano dado. Es decir

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2}$$

sujeto a $2x + 5y - z - 3 = 0$. Conviene tratar simplemente $D = (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2$ sujeto a $2x + 5y - z - 3 = 0$, pues donde $d$ toma su

máximo o mínimo relativo, también lo hace $D$ y recíprocamente.
Formamos la función auxiliar

$$F = D + \lambda\phi = (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 + \lambda(2x+5y-z-3)$$

Los puntos críticos de $F$ los obtenemos del sistema:

$$\begin{array}{l} F_x = 2(x-2) + \lambda(2) = 0 \\ F_y = 2(y+3) + \lambda(5) = 0 \\ F_z = 2(z-1) + \lambda(-1) = 0 \\ F_\lambda = 2x+5y-z-3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -\dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{2} \\ \lambda = -1 \end{array}$$

entonces el punto $\left(3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ punto crítico de $F$.
Para determinar la naturaleza del punto crítico obtenido conviene tener en cuenta el significado geométrico del problema. Geométricamente es claro que hay una mínima distancia del punto $(2, -3, 1)$ al plano dado y, por tanto, dicha mínima distancia se debe producir con $\left(3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Luego la distancia más corta pedida es

$$d = \sqrt{(3-2)^2 + \left(-\frac{1}{2}+3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{2}}$$

40. Hallar la mínima distancia del origen a la hipérbola $x^2 + xy + y^2 = 3$.
Solución. La función a minimizar es la distancia del origen $(0, 0)$ a un punto $(x, y)$ de la hipérbola: $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ sujeto a $x^2 + xy + y^2 = 3$. Como en el ejercicio anterior, conviene trabajar con la función $D = x^2 + y^2$ sujeto a $x^2 + xy + y^2 = 3$. Primeramente, con $\phi = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$, formamos la función auxiliar

$$F = D + \lambda\phi = x^2 + y^2 + \lambda\left(x^2 + xy + y^2 - 3\right)$$

Los puntos críticos de $F$ los obtenemos del sistema:

$$\begin{array}{l} F_x = 2x + \lambda(2x+y) = 0 \\ F_y = 2y + \lambda(x+2y) = 0 \\ F_\lambda = x^2+xy+y^2-3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rr} 2(1+\lambda)x + y = 0 & (1) \\ x + 2(1+\lambda) = 0 & (2) \\ x^2+xy+y^2-3 = 0 & (3) \end{array}$$

El sistema (1), (2) debe tener soluciones $(x, y)$ diferentes de $(0, 0)$, pues $(x, y) = (0, 0)$ no cumple la ecuación (3) por no estar sobre la hipérbola. Por tanto, se debe tener

$$\begin{vmatrix} 2(1+\lambda) & \lambda \\ \lambda & 2(1+\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -\dfrac{2}{3} \\ \lambda_2 = -2 \end{array}$$

Si $\lambda_1 = -\dfrac{2}{3}$:

$$\begin{array}{l} 2\left(\dfrac{1}{3}\right)x - \left(\dfrac{2}{3}\right)y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = y \\ x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm\sqrt{3} \end{array}$$

Luego, los puntos $(1, 1)$, $(-1, -1)$ son puntos críticos.
Si $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{array}{l} 2\,(-1)\,x - 2y = \\ x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -y \\ x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm\sqrt{3} \end{array}$$

Luego, los puntos $\left(\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ son otros puntos críticos. Recurriendo a las segundas derivadas parciales $F_{xx}$, $F_{yy}$, $F_{xy}$ no se puede determinar la naturaleza de estos puntos críticos para $f$ sujeta a $\phi = 0$, (por lo que omitimos los cálculos). Pero sabemos que hay una mínima distancia del origen a la hipérbola, por tanto; procedemos a evaluar $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ en cada punto crítico:

$$d\,(1, 1) = \sqrt{2},\ d\,(-1, -1) = \sqrt{2},\ d\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) = \sqrt{6},\ d\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right) = \sqrt{6}$$

Comparando los valores que toma $d$ en cada punto crítico tenemos que la mínima distancia del origen a la hipérbola dada es $\sqrt{2}$. (Ocurre en los puntos $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ de la hipérbola).

41. Calcular las dimensiones de una cada rectangular, sin tapa, de volumen máximo si tiene 108 m$^2$ de superficie.

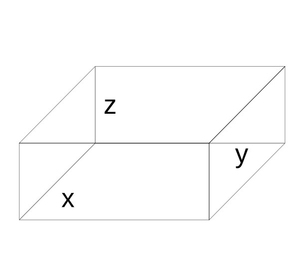


Fig. 5.12

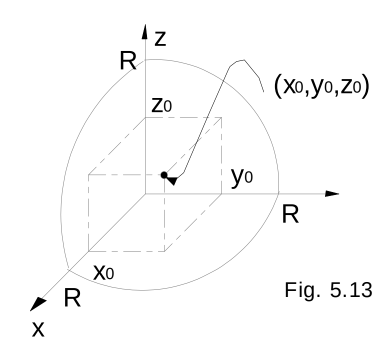


Fig. 5.13

Solución. De la Fig. ###, el volumen de la caja es $V = xyz$. La superficie de la caja sin tapa debe ser 108, es decir $2xz + 2yz + xy = 108$.Por tanto, debemos minimizar $V = xyz$ sujeta a $2xz{+}2yz{+}xy = 108$. Primeramente, con $\phi = 2xz + 2yz + xy - 108$; formamos la función auxiliar

$$F = V + \lambda\phi = xyz + \lambda\,(2xz + 2yz + xy - 108)$$

Averiguamos los puntos críticos (realizando en detalle las operaciones):

$$\begin{array}{l} F_x = yz + \lambda(2z+y) = 0 \\ F_y = xz + \lambda(2z+x) = 0 \\ F_z = xy + \lambda(2x+2y) = 0 \\ F_\lambda = 2xz + 2yz + xy - 108 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = -(yz)/(2z+y) \\ \lambda = -(xz)/(2z+x) \\ \lambda = -(xy)/(2x+2y) \\ 2xz + 2yz + xy - 108 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \dfrac{yz}{2z+y} = \dfrac{xz}{2z+x} \\ \dfrac{yz}{2z+y} = \dfrac{xy}{2x+2y} \\ 2xz + 2yz + xy = 108 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 2yz + xy = 2xz + xy \\ 2xz + 2yz = 2xz + xy \\ 2xz + 2yz + xy = 108 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = y \\ 2z = x \\ 4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 108 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \pm 6 \\ y = \pm 6 \\ z = \pm 3 \end{array}$$

Como las dimensione de la caja deben ser positivas, la caja tiene volumen máximo cuando sus dimensiones son $x = 6$, $y = 6$, $z = 3$.

42. Determinar el volumen máximo del paralelepípedo rectangular con lados paralelos a los planos coordenados que puede inscribirse en una esfera de radio $R$.
Solución. Consideremos un punto $(x_0, y_0, z_0)$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, y en el primer octante como en la Fig. ###.
El volumen del paralelepípedo es $V = 8x_0y_0z_0$. Por tanto, debemos maximizar.

$$V = 8x_0y_0z_0 \text{ sujeto a } x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2$$

Primeramente, con $\phi = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2$ formamos la función auxiliar

$$F = V + \lambda\phi = 8x_0y_0z_0 + \lambda\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2\right)$$

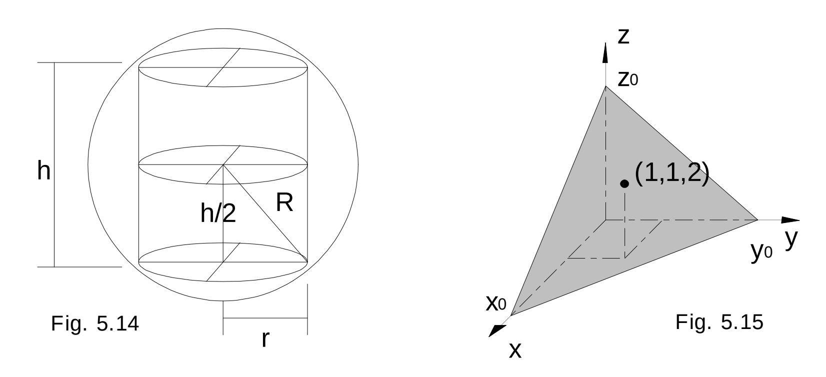
Los puntos críticos obtenemos de

$$\begin{array}{l} F_x = 8y_0z_0 + \lambda(2x_0) = 0 \\ F_y = 8x_0z_0 + \lambda(2y_0) = 0 \\ F_z = 8x_0y_0 + \lambda(2z_0) = 0 \\ F_\lambda = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = -4y_0z_0/x_0 \\ \lambda - 4x_0z_0/y_0 \\ \lambda - 4x_0y_0/z_0 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y_0^2 = x_0^2 \\ z_0^2 = x_0^2 \\ x_0^2 + x_0^2 + x_0^2 = R^2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} x_0 = R/\sqrt{3} \\ y_0 = R/\sqrt{3} \\ z_0 = R/\sqrt{3} \end{array}$$

Solamente tomamos valores positivos por estar $(x_0, y_0, z_0)$ en el primer octante. Por tanto, el volumen máximo es

$$V = 8\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8}{3}\frac{R^3}{\sqrt{3}}$$

43. Inscribir en la esfera de radio $R$, el cilindro de máxima superficie total.




Solución. Sean $r$, $h$ el radio basal y la altura del cilindro tal como se muestra en la Fig. ###; la superficie de cada tapa basal es $\pi r^2$ y la superficie lateral $2\pi rh$. Entonces la superficie total del cilindro es $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Por otra parte, de la Fig. ###, vemos que por estar el cilindro inscrito en una esfera de radio $R$, tenemos $r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2$. Por tanto, la función a maximizar es: $S = 2\pi\left(r^2 + rh\right)$ sujeto a $r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$. Formemos, con $\phi = r^2 + \frac{h^2}{4} - R^2 = 0$, la función auxiliar:

$$F = S + \lambda\phi = 2\pi\left(r^2 + rh\right) + \lambda\left(r^2 + \frac{r^2}{4} - R^2\right)$$

Los puntos críticos se obtienen de:

$$\begin{aligned} F_r &= 2\pi(2r+h) + \lambda(2r) = 0 \\ F_h &= 2\pi(r) + \lambda\left(\frac{2r}{4}\right) = 0 \\ F_\lambda &= r^2 + \frac{h^2}{4} - R^2 = 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} &\lambda = -\pi(2r+h)/r \\ &\lambda = -4\pi r/h \\ &r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} &\frac{2r+h}{r} = \frac{4r}{h} && (1) \\ &r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2 && (2) \end{aligned}$$

De (1) tenemos: $h^2 + 2rh - 4r^2 = 0$ entonces $h = -r \pm \sqrt{r^2 + 4r^2} = -r \pm r\sqrt{5}$. Reemplazando en (2) tenemos: $r^2 + \frac{r^2}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)^2 = R^2$. Después de algunas operaciones algebráicas obtenemos los valores de $r$, $h$:

$$r = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}} \quad , \quad h = R\sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$$

Entonces, de acuerdo al significado geométrico del problema, el cilindro de máxima superficie pedido tiene las dimensiones encontradas.

44. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y determina, en el primer octante, un volumen mínimo.
Solución. Si $x_0$, $y_0$, $z_0$ son las intersecciones del plano con los ejes coordenados, su ecuación es $\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}=1$. El volumen del tetraedro que forma en el primer octante es $V=\frac{1}{6}x_0y_0z_0$, además como el plano debe pasar por $(1,1,1)$ tenemos $\frac{1}{x_0}+\frac{1}{y_0}+\frac{1}{z_0}=1$. Por tanto, debemos minimizar $V=\frac{1}{6}x_0y_0z_0$ sujeto a

$$\frac{1}{x_0}+\frac{1}{y_0}+\frac{1}{z_0}=1 \quad (1)$$

No conviene aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange a esta función porque se complican los cálculos. Es mejor hacer $u=\frac{1}{x_0}$, $v=\frac{1}{y_0}$, $w=\frac{1}{z_0}$. Entonces minimizar (1) equivale a minimizar

$$V=\frac{1}{6uvw} \text{ sujeto a } u+v+w=1 \qquad (2)$$

Todavía podemos simplificar aún más los cálculos observando que minimizar (2) equivale a maximiar

$$V_1=uvw \text{ sujeto a } u+v+w=1 \qquad (3)$$

Ahora, con $\phi=u+v+w-1=0$, formamos la función auxiliar

$$F=V_1+\lambda\phi=uvw+\lambda(u+v+w-1)$$

Los puntos críticos los obtenemos de:

$$\begin{array}{l} F_u=vw+\lambda=0 \\ F_v=uw+\lambda=0 \\ F_w=uv+\lambda=0 \\ F_\lambda=u+v+w-1=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda=-vw \\ \lambda=-uw \\ \lambda=-uv \\ u+v+w=1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u=v \\ v=w \\ u+u+u=1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u=\frac{1}{3} \\ v=\frac{1}{3} \\ w=\frac{1}{3} \end{array}$$

Entonces. $x_0=\frac{1}{u}=3$, $y_0=\frac{1}{v}=3$, $z_0=\frac{1}{w}=3$. Por tanto, de acuerdo al significado geométrico del problema, la ecuación del plano pedido es

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$$

45. Hallar la ecuación del plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a_2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ que en

el primer octante determina un volumen mínima. ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$).

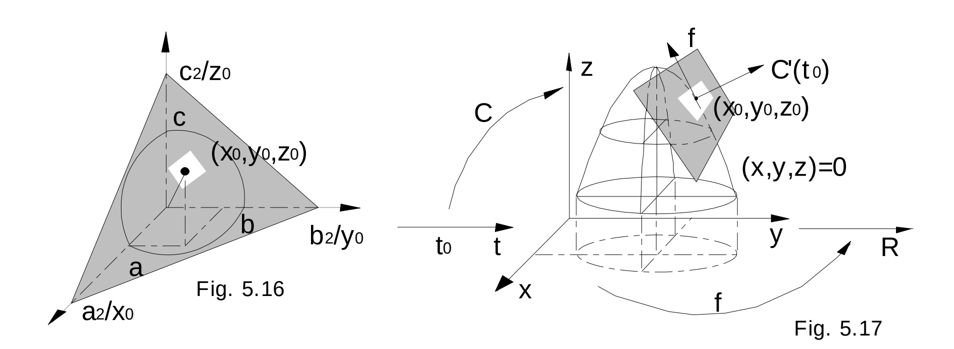


Fig. 5.16
Fig. 5.17

Solución. Sea $(x_0, y_0, z_0)$ el punto del elipsoide donde el plano tangente forma el volumen mínimo. Por el ejercicio 9 la ecuación de dicho plano es

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$$

y se intersecta con los ejes coordenados en

$$x = \frac{a^2}{x_0},\ y = \frac{b^2}{y_0},\ z = \frac{c^2}{z_0}$$

respectivamente.
Entonces el volumen del tetraedro formado en el primer octante es

$$V = \frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0};$$

Además, como el punto $(x_0, y_0, z_0)$ está sobre el elipsoide tenemos $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$. Por tanto, la función a minimizar es:

$$V = \frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0} \text{ sujeto a } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1 \qquad (1)$$

Conviene hacer $u = \frac{x_0}{a}$, $v = \frac{y_0}{b}$, $w = \frac{z_0}{c}$; reemplazando en (1) obtenemos la nueva función a minimizar

$$V_1 = \frac{abc}{6}\frac{1}{uvw} \text{ sujeto a } u^2 + v^2 + w^2 = 1 \qquad (2)$$

Notemos que minimizar (2) equivale a maximizar simplemente

$$V_2 = uvw \text{ sujeto a } u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

Formamos la función auxiliar $F = uvw + \lambda\left(u^2+v^2+w^2-1\right)$. Los puntos críticos obtenemos de

$$\begin{array}{l} F_u = vw + \lambda = 0 \\ F_v = uw + \lambda = 0 \\ F_w = uv + \lambda = 0 \\ F_\lambda = u^2+v^2+w^2-1 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = -vw \\ \lambda = -uw \\ \lambda = -uv \\ u^2+v^2+w^2 = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} v = u \\ v = w \\ u^2+u^2+u^2 = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ v = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ w = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}$$

de donde $x_0 = au = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $y_0 = bv = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$, $z_0 = cw = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$. Por tanto reemplazando en $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} + \dfrac{z_0z}{c^2} = 1$ obtenemos la ecuación del plano pedido:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{3}$$

46. Justificar el método de los multiplicadores de Lagrange.
Solución. Supongamos que en $(x_0, y_0, z_0)$ se tiene un máximo o mínimo relativo de $f(x,y,z)$ sujeta a $\phi(x,y,z) = 0$. La ecuación $\phi(x,y,z) = 0$ es una superficie en el espacio. Consideremos una curva $C(t) = (x(t), y(t), z(t))$ sobre esta superficie y que pasa por el punto $(x_0, y_0, z_0)$. Sobre la curva $C$ se tiene $f(x,y,z) = f(x(t), y(t), z(t))$. Como $f(x,y,z)$ sujeto a $\phi(x,y,z) = 0$ tiene máximo o mínimo relativo en $(x_0, y_0, z_0)$, entonces $f(x(t), y(t), z(t))$ tiene máximo o mínimo relativo en $t_0$, y por tanto; del Cálculo I sabemos que su derivada en $t_0$ es cero. Es decir aplicando la regla de la cadena.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

ó

$$\nabla f \circ (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = 0 \qquad (1)$$

donde el gradiente $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ se evalúa en $(x_0, y_0, z_0)$. El vector $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ es tangente a la curva $C$ en $(x_0, y_0, z_0)$, entonces (1) dice que el vector $\nabla f$ es perpendicular a dicho vector tangente y, por tanto, al plano tangente a la superficie $\phi(x,y,z) = 0$ en el punto $(x_0, y_0, z_0)$. Por otra parte, el vector $\nabla\phi = \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}, \dfrac{\partial \phi}{\partial y}, \dfrac{\partial \phi}{\partial z}\right)$ evaluada en $(x_0, y_0, z_0)$ es también perpendicular a dicho plano tangente por el ejercicio 17. Entonces, los vectores $\nabla f$ y $\nabla\phi$ deben ser paralelos; es decir

$$\nabla f = \lambda\nabla\phi, \quad \lambda \text{ constante} \qquad (2)$$

En (2) podemos cambiar $\lambda$ por $-\lambda$ y escribir.
Igualando componentes en (3) obtenemos el sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

que se cumple para todos los puntos donde $f(x,y,z)$ sujeto a $\phi(x,y,z)=0$ tiene un máximo o mínimo relativo.

**DERIVACION BAJO EL SIGNO INTEGRAL**

47. Calcular $g'(u)$ si $g(u)=\int_0^{\pi/2}\sin ux\ dx$. a) Por cálculo directo. b) Empleando la regla de Leibnitz.
Solución. a) Calculando primero la integral (manteniendo $u$ constante):

$$g(u)=\int_0^{\pi/2}\sin ux\,dx=-\left.\frac{\cos ux}{u}\right|_0^{\pi/2}=-\frac{\cos(\pi u/2)}{u}+\frac{1}{u}\qquad(1)$$

Ahora, derivando (1) con respecto a $u$ tenemos:

$$g'(u)=\frac{u(\pi/2)\sin(\pi u/2)+\cos(\pi u/2)}{u^2}-\frac{1}{u^2}=\frac{(\pi/2)\sin(\pi u/2)}{u}+\frac{\cos(\pi u/2)}{u^2}-\frac{1}{u^2}$$

b) Empleando la regla de Leibnitz y considerando que los límites de integración son constantes tenemos:

$$g(u)=\int_0^{\pi/2}\sin ux\,dx\Rightarrow g'(u)=\int_0^{\pi/2}\frac{\partial}{\partial u}(\sin ux)\ dx=\int_0^{\pi/2}s\cos ux\ dx\qquad(2)$$

Integrado por parte (2) obtenemos:

$$g'(u)=\left.\left(\frac{x\sin ux}{u}+\frac{\cos ux}{u^2}\right)\right|_0^{\pi/2}$$
$$=\frac{(\pi/2)\sin(\pi u/2)}{u}+\frac{\cos(\pi u/2)}{u^2}-\frac{1}{u^2}$$

(Por supuesto, los resultados en (a) y (b) coinciden.

48. Si $g(u)=\int_0^u e^{ux}\ dx$, calcular $g'(1)$ a) por cálculo directo, b) empleando la regla de Leibnitz.
Solución. a) Calculamos primero la integral (manteniendo $u$ constante).

$$g(u)=\int_0^u e^{ux}\ dx=\left.\frac{e^{ux}}{u}\right|_0^u=\frac{e^{u^2}-1}{u}\qquad(1)$$

Derivando con respecto a $u$ en (1) y luego evaluando en $u=1$ tenemos:

$$g'(u)=\frac{2u^2e^{u^2}-e^{u^2}+1}{u^2}\Rightarrow g'(u)=e+1$$

b) Empleando la regla de Leibnitz y considerando que los límites de integración dependen de $u$ tenemos:

$$g(u)=\int_0^u e^{ux}\ dx\Rightarrow g'(u)=\int_0^u\frac{\partial}{\partial u}(e^{ux})\,dx+\left.e^{ux}\right|_{x=u}(u)'-\left.e^{ux}\right|_{x=0}(0)'$$
$$=\int_0^u xe^{ux}dx+e^{u^2}\qquad(2)$$

Finalmente, evaluando (2) en $u=1$, tenemos:

$$g'(1)=\int_0^1 xe^x dx+e=\left.(xe^x-e^x)\right|_0^1+e=e+1$$

49. Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2++1)^2}$.
Solución. Esta integral se puede calcular por medio del método de descomposición en fracciones simples estudiado en el Cálculo I, pero eso implica laboriosos cálculos. Resulta más fácil aplicando la regla de Lebnitz. Notemos que derivando $\dfrac{1}{(x^2+u)}$, con respecto a $u$, obtenemos $\dfrac{-1}{(x^2+u)^2}$ que es de la forma del integrando de la integral original dada. Entonces, conviene considerar:

$$g(u)=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+u} \qquad (1)$$

Derivando (1), aplicando la regla de Leibnitz, obtenemos:

$$g'(u)=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{x^2+u}\right)dx=-\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+u)^2} \qquad (2)$$

Por otra parte, integrando en (1) tenemos:

$$g(u)=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+u}=\left.\frac{1}{\sqrt{u}}\arctan\left(\frac{x}{u}\right)\right|_0^1=\frac{1}{\sqrt{u}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$$

y derivando:

$$g'(u)=-\frac{1}{2}u^{-3/2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)+\frac{1}{\sqrt{u}}\frac{-\frac{1}{2}u^{-3/2}}{1+\frac{1}{u}}=-\frac{1}{2\sqrt{u^3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)-\frac{1}{2(u+1)u} \qquad (3)$$

Finalmente, igualando (2) y (3) y evaluando en $u=1$ tenemos:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+u)^2}=\frac{1}{2\sqrt{u^3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)+\frac{1}{2u(u+1)}\Rightarrow\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}$$

luego,

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{8}(\pi+2)$$

50. Verificar que $y(x)=\dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^x f(u)\sin k(x-u)\ du$, $k$ constante, satisface la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=f(x)$$

Solución. Considerando a $x$ como parámetro (notemos que en los ejercicios anteriores el parámetro era $u$ y empleando la regla de Leibnitz tenemos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{k}\int_0^x\frac{\partial}{\partial x}\left(f\left(u\right)\sin k\left(x-u\right)\right)\ du+\left.f\left(u\right)\sin k\left(x-u\right)\right|_{u=x}\left(x\right)'-\left.f\left(u\right)\sin k\left(x-u\right)\right|_{u=0}\left(0\right)'$$

$$=\frac{1}{k}\int_0^x kf\left(u\right)\cos k\left(x-u\right)du+\left(0\right)\left(1\right)-0=\int_0^x f\left(u\right)\cos k\left(x-u\right)du \qquad (1)$$

Aplicando otra vez la regla de Leibnitz en (1) tenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\int_0^x\frac{\partial}{\partial x}\left(f\left(u\right)\cos k\left(x-u\right)\right)du+\left.f\left(u\right)\cos k\left(x-u\right)\right|_{u=x}\left(x'\right)-\left.f\left(u\right)\cos k\left(x-u\right)\right|_{u=0}\left(0\right)'$$

$$=\int_0^x\left(-kf\left(u\right)\sin k\left(x-u\right)\right)du+f\left(x\right)\cdot 1\cdot 1-0=-k\int_0^x f\left(u\right)\sin k\left(x-u\right)du+f\left(x\right) \qquad (2)$$

Con este resultado tenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=-k\int_0^x f\left(u\right)\sin k\left(x-u\right)du+f\left(x\right)+k^2\left(\frac{1}{k}\int_0^x f\left(u\right)\sin k\left(x-u\right)du\right)$$

ó

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=f\left(x\right)$$

51. Demostrar la regla de Leibnitz para derivar bajo el signo integral.
Solución. La fórmula de Leibnitz se obtiene operando adecuadamente para obtener expresiones adecuadas.
Con

$$g\left(u\right)=\int_{u_1(u)}^{u_2(u)}f\left(x,u\right)dx,$$

tenemos

$$g\left(u+h\right)-g\left(u\right)=\int_{u_1(u+h)}^{u_2(u+h)}f\left(x,u+h\right)dx-\int_{u_1(u)}^{u_2(u)}f\left(x,u\right)dx$$

$$=\int_{u_1(u+h)}^{u_1(u)}f\left(x,u+h\right)dx+\int_{u_1(u)}^{u_2(u)}f\left(x,u+h\right)dx+\int_{u_2(u)}^{u_2(u+h)}f\left(x,u+h\right)dx-\int_{u_1(u)}^{u_2(u)}f\left(x,u\right)dx$$

$$=\int_{u_1(u)}^{u_2(u)}\left(f\left(x,u+h\right)-f\left(x,u\right)\right)dx+\int_{u_2(u)}^{u_2(u+h)}f\left(x,u+h\right)dx-\int_{u_1(u)}^{u_1(u+h)}f\left(x,u+h\right)dx \qquad (1)$$

Por los teoremas del valor medio (estudiados en el Cálculo I), se tiene:

$$\int_{u_1(u)}^{u_2(u)}f\left(x,u+h\right)-f\left(x,u\right)dx=h\int_{u_1(u)}^{u_2(u)}f_u\left(x,c\right)dx \qquad (2)$$

$$\int_{u_1(u)}^{u_1(u+h)}f\left(x,u+h\right)dx=f\left(c_1,u+h\right)\left(u_1\left(u+h\right)-u_1\left(u\right)\right) \qquad (3)$$

$$\int_{u_2(u)}^{u_2(u+h)}f\left(x,u+h\right)dx=f\left(c_2,u+h\right)\left(u_2\left(u+h\right)-u_2\left(u\right)\right) \qquad (4)$$

donde $c$ está entre $u$ y $u+h$, $c_1$ entre $u_1(u)$ y $u_1(u+h)$, $c_2$ entre $u_2(u)$ y $u_2(h+h)$. Reemplazando en (1) y dividiendo entre $h$, obtenemos:

$$\frac{g(u+h)-g(u)}{h} = \int_{u_1(u)}^{u_2(u)} f_u(x,c)\,dx + f(c_2,u+h)\left(\frac{u_2(u+h)-u_2(u)}{h}\right) - \\ -f(c_1,u+h)\left(\frac{u_1(u+h)-u_1(u)}{h}\right) \quad (5)$$

Finalmente, tomando límites en (5) con $h \to 0$ obtenemos la regla de Leibnitz:

$$g'(u) = \int_{u_1(u)}^{u_2(u)} f_u(x,u)\,dx + f(u_2(u),u)\frac{du_2}{du} - f(u_1(u),u)\frac{du_1}{du}$$

**CALCULOS APROXIMADOS**

52. Calcular $(1.01)^7(3.97)^{3/2}$.
Solución. Consideremos la función $p(x,y) = x^7y^{3/2}$. Notemos que $p(1,4) = 1^7 4^{3/2} = 8$. Y en $(x,y) = (1,4)$ tenemos

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 7x^6y^{3/2} = 56$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{3}{2}x^7y^{1/2} = 3$$

De la fórmula $p(1+0.01, 4-0.03) \simeq p(1,4) + \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy$ con $dx = 0.01$, $dy = -0.03$ tenemos:

$$(1.01)^7(3.97)^{3/2} = p(1+0.01, 4-0.03) \\ \simeq 8 + (56)(0.01) + (3)(-0.03) = 8.47$$

de donde

$$(1.01)^7(3.97)^{3/2} \simeq 8.47$$

53. Uno de los lados de un rectángulo es $a = 10$ cm., y el otro $b = 24$ cm. Calcular la variación de la diagonal de este rectángulo si el lado $a$ se alarga 4 mm. y el lado $b$ se acorta 1 mm. Hallar la magnitud aproximada de la

variación y compararla con la exacta.

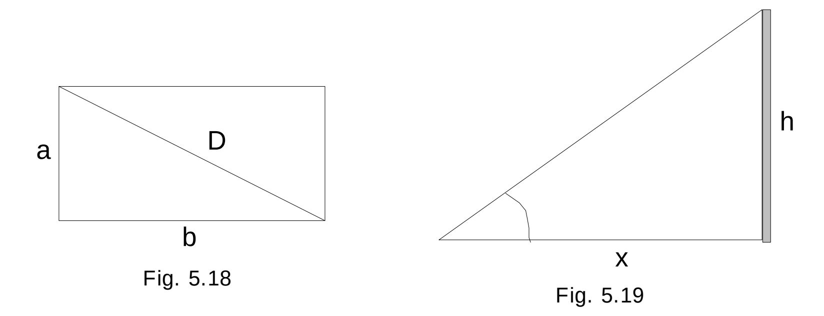


Fig. 5.18

Fig. 5.19

Solución. De la Fig. ### tenemos $D = \sqrt{a^2 + b^2}$. Considerando que con $a = 10$ cm, $b = 24$ cm. se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial a} &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{10}{26} \\ \frac{\partial D}{\partial b} &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{24}{26} \end{aligned}$$

y tomando $da = 4$ mm. $= 0.4$ cm., $db = -1$ mm $= -0.1$ cm tenemos que la aparición de $D$, aproximadamente, está dada por $dD$:

$$\begin{aligned} \Delta D &\simeq dD = \frac{\partial D}{\partial a} da + \frac{\partial D}{\partial b} db \\ &\simeq \left(\frac{10}{26}\right)(0.4) + \left(\frac{24}{26}\right)(-0.1) \\ &\simeq 0.0615 cm. \end{aligned}$$

Por otra parte, el valor exacto de la variación $\Delta D$ es

$$\Delta D = \sqrt{(10.4)^2 + (23.9)^2} - \sqrt{10^2 - 24^2} = 0.0647 \text{ cm.}$$

que es aproximadamente igual al calculado usando la diferencial.

54. El diámetro y la altura de un estanque cilíndrico miden 4 y 6 ms. respectivamente. Si el diámetro se dilata en 1 cm y la altura en 2 cm., calcular aproximadamente a) la varación del volumen del cilindro, b) la variación de la superficie lateral.
Solución. a) El volumen del cilindro en función de su diámetro $D$ y su altura $h$ es

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 h$$

Con $D = 4$ m., $h = 6$ m, $dD = 1$ cm $= 0.1$ cm, $dh = 2$ cm $= 0.2$ m. Tenemos que la variación de volumen aproximadamente es

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial D}dD + \frac{\partial V}{\partial h}dh = \frac{\pi}{2}Dh\left(dD\right) + \frac{\pi}{4}D^2\left(dh\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(4\right)\left(6\right)\left(0.1\right) + \frac{\pi}{4}\left(4\right)^2\left(0.2\right) = 2\pi = 6.28 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

b) La superficie lateral del cilindro es $S = \pi Dh$. Procediendo como en a) tenemos que la variación de la superficie lateral aproximadamente es

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\partial S}{\partial D}dD + \frac{\partial S}{\partial h}dh = \pi h\left(dD\right) + \pi D\left(dh\right) \\ &= \pi\left(6\right)\left(0.1\right) + \pi\left(4\right)\left(0.2\right) = 1.4\pi = 4.4 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

55. Las dimensiones interiores de una caja rectangular de madera con tapa son $2 \times 1.5 \times 1$ m. Si el espesor de la madera debe ser 3 cm, calcular aproximadamente la cantidad de madera que se necesita para construirla.
Solución. El volumen de una caja es $V = xyz$. Con $x = 2$ m, $y = 1.5$ m, $z = 1$ m; $dx = dy = dz = 3$ cm $= 0.03$ m, la cantidad de madera necesaria aproximadamente es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$
$$= \left(1.5\right)\left(1\right)\left(0.03\right) + \left(2\right)\left(1\right)\left(0.03\right) + \left(2\right)\left(1.5\right)\left(0.03\right) = 0.195 \text{ m}^3$$

56. El ángulo de elevación del extremo de una torre está calculado en 30° con un error posible de 0.5° y la distancia a la base es de 35 m con un error posible de 0.3 m. Calcular el error posible en la medida de la altura de la torre.
Solución. De la Fig. ###, la altura $h$ de la torre está dada por

$$h = x \tan\theta$$

El error posible en la medida de $h$ es la diferencia entre el valor que se obtiene calculando con $x = 35$ m, $\theta = 30°$ y el que se obtiene con $x = 35 + 0.3$ m, $\theta = 30° + 0.5°$.
Por tanto, el error posible es aproximadamente:

$$\begin{aligned} dh &= \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial \theta}\partial\theta \\ &= \tan\theta dx + x\sec^2\theta d\theta \end{aligned}$$

con $x = 35$ m, $\theta = 30°$, $dx = 0.3$ m, $d\theta = 0.5° = 0.0087$ rad, tenemos que el error posible, aproximadamente, es

$$dh = \left(0.5774\right)\left(0.3\right) + \left(35\right)\left(1.3333\right)\left(0.0087\right) = 0.5792 \text{ m}$$

notemos que $d\theta$ debe expresarse en radianes.
**ERRORES**

57. Al medir los catetos $a$, $b$ de un triángulo rectángulo se han obtenido los valores $a = 10$ cm, $b = 20$ cm con un error de 0.2 cm en cada una de dichas medidas. Hallar a) el error absoluto máximo, b) el error relativo máximo; que se comete al calcular el área del triángulo con los valores obtenidos.

    Solución. a) El área del triángulo es $A = \frac{1}{2}ab$ y, por tanto; el error absoluto máximo es

    $$E = \left|\frac{\partial A}{\partial a}\right| |da| + \left|\frac{\partial A}{\partial b}\right| |db| \quad (1)$$

    Con $a = 10$, $b = 20$, tenemos: $\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{2}b = 10, \frac{\partial A}{\partial b} = \frac{1}{2}a = 5$, además $dx = 0.2$, $dy = 0.2$. Por tanto, reemplazando en (1) tenemos:

    $$E = |10|\,|0.2| + |5|\,|0.2| = 3$$

    b) Como el valor aproximado del área es $A = \frac{1}{2}(10)(20) = 100$ cm$^2$ y el error absoluto máximo es igual a 3; el error relativo máximo es

    $$e = \frac{3}{100} = 0.03$$

    Notemos que $E = 3$ significa que el verdadero valor del área está entre $100 \pm 3$ cm$^2$.

58. El diámetro $D = 8.0$ cm y la altura $h = 12.5$ cm de un cilindro circular han sido medidos con un margen de error de $\pm 0.05$ cm en cada medida. Hallar el máximo error posible que se comete al calcular el volumen del cilindro por la fórmula $V = \frac{\pi}{4}D^2h$.

    Solución. El error absoluto máximo $E$ nos da el máximo error posible. De $V = \frac{\pi}{4}D^2h$ tenemos,

    $$E = \left|\frac{\partial V}{\partial D}\right| |dD| + \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right| |dh| \quad (1)$$

    Con $D = 8.0$ cm, $h = 12.5$ cm, tenemos $\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi}{2}Dh = 50\pi$; $\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{4}D^2 = 16\pi$. Además, $|dD| = 0.05$ y $|dh| = 0.05$. Por tanto, reemplazando en (1) obtenemos

    $$E = |50\pi|\,|0.05| + |16\pi|\,|0.05| = 10.5 \text{ cm}^3$$

    Notemos que el volumen aproximado, calculado con $D = 8.0$ cm y $h = 12.5$ cm es $V = 628.3$ cm$^3$, entonces el verdadero valor del volumen está entre $628.3 \pm 10.5$ cm$^3$.

59. Mostrar que el error relativo máximo de una función es igual al error absoluto máximo del logaritmo de la función. Es decir,

    $$e(f) = E(\ln f)$$

Solución. Teniendo en cuenta que el error absoluto de $f$ es:

$$E(f) = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| |dx_1| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| |dx_2| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| |dx_n| \quad (1)$$

tenemos que el error relativo máximo de $f$ está dado por:

$$e(f) = \frac{E(f)}{|f|} = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{f}\right| |dx_1| + \cdots + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{f}\right| |dx_n| \quad (2)$$

con $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\ln f) = \dfrac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{f}$, para $i = 1, 2, \cdots, n$. Reemplazando en (2) tenemos

$$e(f) = \left|\frac{\partial}{\partial x_1}(\ln f)\right| |dx_1| + \left|\frac{\partial}{\partial x_2}(\ln f)\right| |dx_2| + \cdots + \left|\frac{\partial}{\partial x_n}(\ln f)\right| |dx_n| \quad (3)$$

Pero el segundo miembro de (3) es precisamente el error absoluto máximo del logaritmo de $f$. Es decir

$$e(f) = E(\ln f)$$

60. Mostrar que el error relativo máximo de un producto es igual a la suma de los errores relativos máximos de los factores; es decir, $e(xy) = e(x) + e(y)$.
Solución. De la definición del error relativo máximo tenemos:

$$e(xy) = \frac{E(xy)}{|xy|} = \frac{\left|\frac{\partial}{\partial x}(xy)\right| |dx| + \left|\frac{\partial}{\partial y}(xy)\right| |dy|}{|xy|}$$

$$= \frac{|y|\,|dx| + |x|\,|dy|}{|xy|} = \frac{|dx|}{|x|} + \frac{|dy|}{|y|}$$

$$= \frac{\left|\frac{d}{dx}(x)\right| |dx|}{|x|} + \frac{\left|\frac{d}{dy}(y)\right| |dy|}{|y|} = e(x) + e(y)$$

## 5.10 EJERCICIOS PROPUESTOS

### TRANSFORMACION DE ECUACIONES

1. Transformar la ecuación $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{a^2}{x^2}y = 0$ efectuando el cambio $x = \dfrac{1}{z}$.

2. Expresar la fórmula de la curvatura de una curva $y = f(x)$ dada por $k = \dfrac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}$ pasando a coordenadas polares $x = r\cos\theta$ , $y = r\sin\theta$.

3. Transformar la ecuación $x\dfrac{dz}{dy} + y\dfrac{dz}{dx} = 0$ efecutando el cambio de variables $u = x^2 + y^2$, $v = -y$.

4. Transformar la ecuación $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ se efectúa el cambio de variables $x = u\cos a - v\sin a$, $y = u\sin a + v\cos a$; la nueva ecuación que se obtiene es
$$\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 = 0$$

5. Mostrar que la ecuación $x^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + y^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial U}{\partial x} + y\dfrac{\partial U}{\partial y} = 0$ se transforma en $\dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial s^2} = 0$; bajo el cambio $x = e^r$, $y = e^s$.

**PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL**

Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a cada una de las siguientes superficies en el punto indicado

6. $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, en el punto $(1, -2, 3)$.

7. $x^2 + 2z^2 = 3y^2$, en el punto $(2, -2, -2)$.

8. $z = xy$, en el punto $(3, -4, 12)$.

9. $xz^2 + x^2y = z - 1$, en el punto $(1, -3, 2)$.

10. Mostrar que la ecuación del plano tangente a la cuádrica trasladada $ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz = g$ en el punto $(x_0, y_0, z_0)$ está dado por
$$ax_0x + by_0y + cz_0z + \frac{d}{2}(x_0 + x) + \frac{e}{2}(y_0 + y) + \frac{f}{2}(z_0 + z) = g$$

11. Aplicar el ejercicio anterior para hallar la ecuación del plano tangente a la superficie: a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2z = 0$ en $(1, -1, 2)$, b) $x^2 - 3y^2 + z^2 + x - 3y + 7z = 2$ en $(-1, 1, 1)$.

12. Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ y paralelo al plano $x + 4y + 6z = 0$.

13. Hallar la ecuación del plano tangente al elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, en el primer octante, de tal modo que intercepte a los ejes coordenados a igual longitud del origen.

14. Hallar la constante $c$ tal que en todo punto de la intersección de las dos esferas $(x-c)^2+y^2+z^2=3$, $x^2+(y-1)^2+z^2=1$ los planos tangentes correspondientes son perpendiculares uno al otro.
**DERIVADAS DIRECCIONALES**
Calcular la derivada direccional de cada una de las siguientes funciones en el punto dado y en la dirección indicada.

15. $f(x,y)=1-2x^2+3y^2$ en $(2,-1)$ en la dirección de $V(3,4)$.

16. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ en $(1,1,-2)$ en la dirección de $V(2,-1,2)$.

17. $f(x,y,z)=xyz$ en $(1,0,-1)$ en la dirección de la hélice $c(t)=(t,\sin\pi t,\cos\pi t)$.

18. Calcular la derivada de $f(x,y)=5x^2-3x-y-1$ en el punto $(2,1)$ en la dirección de la recta que une este punto con el punto $(5,5)$.

19. Si $f(x,y)=x^3+3x^2+4xy+y^2$, mostrar que en el punto $\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$ la derivada direccional es igual a cero, en cualquier dirección (éste es un punto crítio de $f$).

20. Si $f(x,y)=4x^2+9y^2$, encontrar la dirección para la cual la derivada direccional en el punto $(2,1)$ es cero.

21. Si $f(x,y,z)=2xz-y^2$, ¿En qué dirección la derivada direccional de $f$ en el punto $(1,3,2)$ es a) máxima?, b) es mínima? c) calcular dichos valores.

22. Si la temperatura $T$ en el punto $(x,y)$ está dada por $T(x,y)=x^2+y^2$, a) Graficar en el plano los puntos donde $T=0$, $T=1$, $T=2$, $T=4$. b) Calcular la derivada direccional de $T$ en el punto $(1,1)$ y en la dirección de cada uno de los ocho vectores $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(-1,1)$, $(-1,0)$, $(-1,-1)$, $(0,-1)$, $(-1,-1)$. c) ¿En cuál de estas ocho direcciones aumenta la temperatura con mayor rapidez?, ¿disminuye con mayor rapidez?, ¿no cambia?. d) ¿En qué dirección del plano aumenta la temperatura con mayor rapidez? y ¿en qué dirección disminuye con mayor rapidez?
**MAXIMOS Y MINIMOS**
Hallar los máximos y mínimos relativos a puntos silla:

23. $f(x,y)=x^2+y^2-4x+6y+25$.

24. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

25. $z=x^3+y^3+3xy$.

26. $z=x^2+2xy+3y^2$.

27. $z=x^2+2y^2+6xy-6x+10y+5$.

28. $z=2x^3-2x^2y+xy^2-y^3-3x+3y$.

29. $z=xy(2x+4y+1)$.

30. $f(x,y) = x^2 + y^2 e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

31. $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$ con $0 \le x, y \le \pi$.

32. Encontrar los extremos de $z$ sobre la superficie $2x^2+3y^2+z^2-12xy+4xz35$.

33. Verificar que $(0,0)$ es un punto crítico de $f(x,y) = \left(x-y^2\right)\left(2x-y^2\right)$ y determinar su naturaleza.

34. Si $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$, mostrar que sobre toda recta que pasa por el origen, la función tiene un mínimo en $(0,0)$ y que sin embargo no existe mínimo relativo en $(0,0)$. (Sug. Graficar los puntos donde $f(x,y) > 0$ y $f(x,y) < 0$).

35. Hallar los extremos de $f(x,y) = x^3y^2(6-x-y)$.
**MAXIMOS Y MINIMOS CONDICIONADOS (Multiplicadoes de Lagrange)**
Hallar los máximos y mínimos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones que se indican.

36. $f(x,y) = x^2 + y^2$ con $x - y = 3$.

37. $f(x,y) = x + y$ con $xy = 1$.

38. $f(x,y) = x + y^2$ con $2x^2 + y^2 = 1$.

39. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ con $3x + 2y - 7z = 5$.

40. $f(x,y,z) = x + y + z$ con $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

41. $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

42. $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ con $x - y = \dfrac{\pi}{4}$, $0 \le x \le \pi$.

43. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ con $x^2 + y^2 = 1$, $z = x + 1$.

44. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ con $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$.

45. $f(x,y,z) = xyz$ con $x + y - z = 3$, $x - y - z = 8$.

46. $f(x,y,z) = xyz$ con $x + y + z = 5$, $xy + yz + xz = 8$.

47. Hallar una fórmula para la distancia más corta del punto $(x_0, y_0, z_0)$ al plano $ax + by + cz = d$.

48. Hallar la mínima distancia del origen a la hipérbola $7x^2 + 8xy + y^2 = 225$.

49. Encontrar la distancia más corta entre dos puntos cualesquiera de las rectas $x = 1 + 2t$, $y = 3$, $z = 5 - t$; $x = 2 - 4t$, $y = 8 + 3t$, $z = 11 + t$.

50. Encontrar la distancia más corta desde un punto de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ hasta la recta $x + y = 4$.

51. Determinar de todos los triángulos de igual perímetro $2p$ el que tiene mayor área.

52. Calcular las dimensione de un envase de lata cilíndrico (con una tapa) que debe contener un litro, de tal modo que su fabricación requiera la mínima cantidad de metal.

53. Calcular las aristas del mayor paralelepípedo rectangular que tiene 3 caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

54. Determinar el paralelepípedo rectangular de máximo volumen y lados paralelos a los planos coordenados que puede inscribirse en el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

55. Calcular el máximo y el mínimo valor de la suma de los ángulos formados por una recta que pasa por el origen y los ángulos se mide a) con los ejes coordenados, b) con los planos coordenados.

**DERIVACION BAJO EL SIGNO INTEGRAL**

Si $g(u)=\int_0^{\pi/2}\cos ux dx$, calcular $g'(u)$ a) por cálculo directo, b) empleando la regla de Leibnitz.

56. Si $g(u)=\int_0^{\pi}(1-u\cos x)\,dx$, calcular $g'(u)$ a) por cálculo directo, b) empleando la regla de Leibnitz.

57. Calcular $g'(u)$ si $g(u)=\int_0^{u}\tan(x-u)\,dx$.

58. Calcular $g'(u)$ si $g(u)=\int_0^{u^2}\sqrt{x}dx$.

59. Si $g(u)=\int_{-u^2}^{2u}e^{\left(x^2/u^2\right)}dx$, calcular $g'(2)$.

60. Calcular $\int_0^1 x\ln x dx$, aciendo $g(u)=\int_0^1 x^u dx$.

61. Mostrar que $\int_0^1 x^n(\ln x)^m\,dx=\frac{(-1)^m\,m!}{(n+1)^{m+1}}$, $m=1,2,3,...$

62. Verificar que $y=\int_0^x f(u)\,e^{x-u}du$ es solución de $\frac{dy}{dx}-y=f(x)$.

63. Si $g(u,v)=\int_{u-cv}^{u+cv}f(x)\,dx$, donde $c>0$, mostrar que $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}=c^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$.

**CALCULOS APROXIMADOS**

64. Calcular $\sqrt{(1,1)^3 + (1.98)^3}$

65. Calcular $2.98e^{0.01}$.

66. Calcular $\sqrt{(2.01)^2 + (5.98)^2 + \sqrt{2.99}^2}$.

67. Calcular $\dfrac{1}{2.01} + \dfrac{1}{2.98} + \dfrac{1}{6.03}$.

68. La altura de un cilindro es $h = 30$ cm y el radio de su base es 5 cm; calcular la dirección de volumen del cilindro si $h$ se aumenta en 0.2 cm y $r$ se disminuye en 0.1 cm.

69. Las dimensiones interiores de una caja metálica rectangular cerrada son $30 \times 20 \times 15$ cm; si el espesor del metal es 3 mm, calcular aproximadamente la cantidad de material empleada en su construcción.

70. Una caja cerrada, cuyas dimensiones exteriores son de 10 cm, 8 cm, 6 cm; está hecha de madera de 2 mm de espesor. Determinar el volumen aproximado del material que se gastó en hacer la caja.

71. Cuál es el error posible de la medida de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si los catetos miden 11.5 m y 7.8 m con un error posible de 0.1 m.

72. Una pila de ladrillos mide $6 \times 50 \times 4$ pies, pero la cinta métrica comete un error por alargamiento del uno por ciento de la longitud medida; si se calculan 12 ladrillos por pie cúbico y el millar de ladrillos cuesta 200 mil pesos, calcular el error aproximado en el costo.
**ERRORES**

73. Al determinar el cateto $b = 121.56$ m y el ángulo $\theta = 25°21'40''$ de un triángulo rectángulo se han cometido los errores máximos absolutos $h_1 = 0.05$, $h_2 = 12''$, respectivamente. Determinar a) el error absoluto máximo, b) el error relativo máximo, cometido en el cálculo del cateto $a$ por la fórmula $a = b\tan\theta$.

74. El período de oscilación de un péndulo es $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, donde; $l$ es el largo del péndulo, g es la aceleración debida a la fuerza de la gravedad. Determinar a) el error absoluto máximo, b) el error relativo máximo al calcular $T$ con $l = 2$ pies, $g = 32$ pies/seg$^2$, si los valores verdaderos eran $l = 1.95$ pies y $g = 32.2$ pies/seg$^2$?

75. El diámetro de un cilindro circular recto es $6.0 \pm 0.03$ cm y su altura es de $4.0 \pm 0.02$ cm según las medidas tomadas. Hallar a) el error absoluto máximo, b) el error relativo máximo, al calcular el volumen.

76. Mostrar: el error relativo máximo de un cociente es la suma de los errores relativos máximos de los términos. Es decir, $e\,(x/y) = e\,(x) + e\,(y)$.

# Chapter 6

# INTEGRALES MULTIPLES

En este capítulo, el concepto de integral de una función de una sola variable sobre un intervalo estudiado en el Cálculo I, se extiende de manera natural primero a funciones de dos variables sobre una región plana y después a funciones de tres variables sobre un sólido. Estas ideas se utilizan en el cálculo de áreas de regiones planas y al cálculo de volúmenes; además de otras aplicaciones.

Recordemos que si $f(x)$ es una función definida en $[a, b]$, la integral de $f$ sobre $[a, b]$ se define de la siguiente manera:

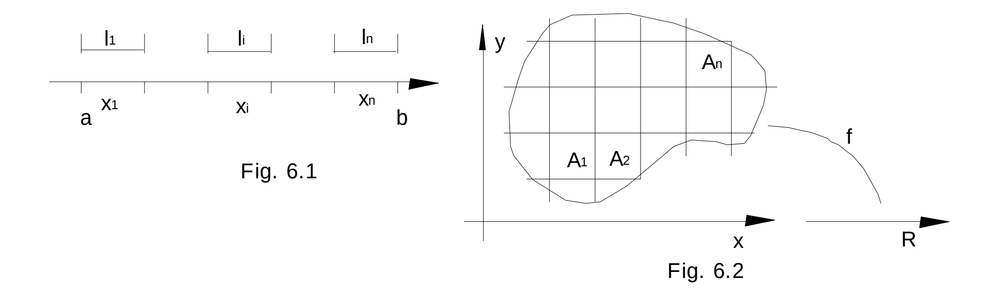


Fig. 6.1

Fig. 6.2

Dividamos $[a, b]$ en $n$ partes, de longitudes $l_1, l_2, ..., l_n$ respectivamente.

Ahora, de cada pedazo elijamos arbitrariamente un punto $x_i$ y formemos la suma

$$S_n = f(x_1)\, l_1 + ... + f(x_n)\, l_n \tag{6.1}$$

Si el límite de $S_n$ existe, cuando el número de subdivisiones aumenta (es decir, $n \to \infty$) y los pedazos son todos cada vez más pequeños (es decir, max $l_i \to 0$);

entonces a tal límite se llama integral de $f(x)$ sobre $[a,b]$ y se representa por

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(f(x_1)\,l_1 + f(x_2)\,l_2 + ... + f(x_n)\,l_n\right) \tag{6.2}$$

Por supuesto, en (2) el límite se toma además con $\max l_i \to 0$ pero omitimos esto en la notación para no sobrecargarla.

## 6.1 INTEGRALES DOBLES

Vamos a definir la integral de una función de dos variables sobre una región $A$ del plano. Consideremos una función $f(x,y)$ de $R^2$ en $R$ y definida en una región $A$ como en la Fig. ###. Dividamos $A$ en $n$ partes de área $A_1, A_2, ..., A_n$ respectivamente.

Ahora, de cada pedazo elijamos arbitrariamente un punto $(x_i, y_i)$ y formemos la suma

$$S_n = f(x_1,y_1)\,A_1 + ... + f(x_n,y_n)\,A_n \tag{6.3}$$

Si el límite de $S_n$ existe, cuando el número de subdivisiones aumenta (es decir, $n \to \infty$) y los pedazos son cada vez más pequeños (es decir, $\max A_i \to 0$); entonces a tal límite se llama integral doble de $f(x,y)$ sobre la región $A$ y se representa por

$$\int\int_A f(x,y)\,dA.$$

Es decir

$$\int\int_A f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty}\left(f(x_1,y_1)\,A_1 + f(x_2,y_2)\,A_2 + ... + f(x_n,y_n)\,A_n\right) \tag{6.4}$$

Si el límite (4) existe se dice que $f(x,y)$ es integrable sobre $A$. No todas las funciones son integrables; sin embargo, las funciones que son continuas en $A$ son integrables sobre $A$.

Observando (4) resulta evidente que el cálculo de la integral doble a partir de su definición es tremendamente moroso. Sin embargo, notemos que para $n$ fijo, (3) da aproximadamente el valor de la integral doble y, por tanto, siempre podemos hallar el valor de la integral doble por lo menos aproximadamente.

**Example 56** *Calcular aproximadamente la integral doble de* $f(x,y) = x + y$ *sobre el triángulo de vértices* $(0,0)$*,* $(4,0)$*,* $(0,4)$*.*

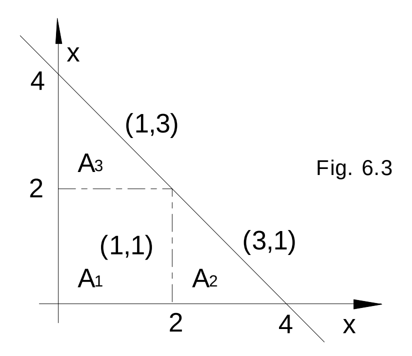


Fig. 6.3

*Tomemos* $n = 3$*. Dividamos el triángulo en 3 partes* $A_1$*,* $A_2$*,* $A_3$ *y elijamos un punto de cada parte tal como se muestra en la Fig. ###. Las áreas* $A_1$*,* $A_2$ *y* $A_3$ *se calculan fácilmente:* $A_1 = 4$*,* $A_2 = 2$*,* $A_3 = 2$*. Por tanto,*

$$\begin{aligned}\iint_A (x+y)\,dA &\simeq f(x_1,y_1)\,A_1 + f(x_2,y_2)\,A_2 + f(x_3,y_3)\,A_3 \\ &= f(1,1)\,4 + f(3,1)\,2 + f(1,3)\,2 \\ &= (1+1)\,4 + (3+1)\,2 + (1+3)\,2 = 24\end{aligned}$$

*(como* $n = 3$ *no es muy grande, es de esperar que la aproximación no sea muy buena).*

### 6.1.1 Cálculo de las integrales dobles

El cálculo de las integrales dobles de casi todas las funciones que tratamos se reduce, afortunadamente, al cálculo consecutivo o iterado de dos integrales simplesque, como sabemos, a su vez se calculan fácilmente por medio del Teorema Fundamental del Cálculo. El teorema que establece la manera en que de una integral doble se pasa a una integral iterada, con toda razón, recibe un nombre que señala su importancia.

**Teorema 6.1.** (Teorema Fundamental de las Integrales Dobles)

Si $f(x,y)$ es integrable sobre una región plana $A$, y:

a) La región $A$ es limitada inferiormente por las curvas $y = y_1(x)$ y superiormente por $y = y_2(x)$. Entonces

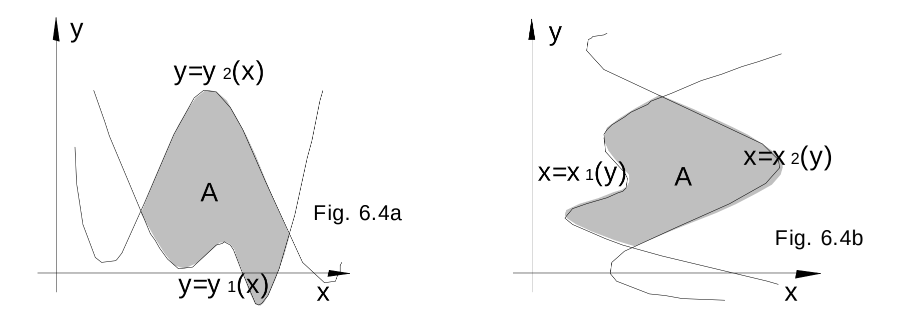
$$\iint_A f(x,y)\,dA = \int_{x=a}^{x=b} \left( \int_{y=y_1}^{y=y_2} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dydx \qquad (6.5)$$

donde el intervalo $[a,b]$ es la proyección de $A$ sobre el eje $x$ (Fig. ###).

b) Si la región $A$ es limitada por la izquierda por la curva $x = x_1(y)$ y por la derecha por $x = x_2(y)$. Entonces

$$\int\int_A f(x,y)\,dA = \int_{y=c}^{y=d}\left(\int_{x=x_1}^{x=x_2} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dxdy \tag{6.6}$$

donde el intervalo $[c,d]$ es la proyección de $A$ sobre el eje y (Fig. ###). Por supuesto, las integrales simples de (5) y (6) deben existir.




En (5) al realizar la primera integración con respecto de $y$ la variable $x$ se mantiene constante; mientras que en (6) al realizar la integración con respecto de $x$ la variable $y$ se mantiene constante.

En la práctica, la elección del orden de integración depende de la curva que limita a la región de integración $A$. Es preferible que las curvas o funciones que limitan a la región $A$ ya sea superior e inferiormente, o ya sea por la izquierda o por la derecha están dadas por una sola ecuación cada una. Si no fuera así, entonces se puede descomponer $A$ en regiones $A_1, A_2, ...$ limitadas en la forma deseada y la integral sobre $A$ se obtiene tomando la suma de las respectivas integrales dobles sobre $A_1$, $A_2$, ... (Ejercicios 16, 18, 19 y 30).

**Example 57** *Calcular*

$$\int\int_A xydA,$$

*donde $A$ es la región limitada por la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$.*

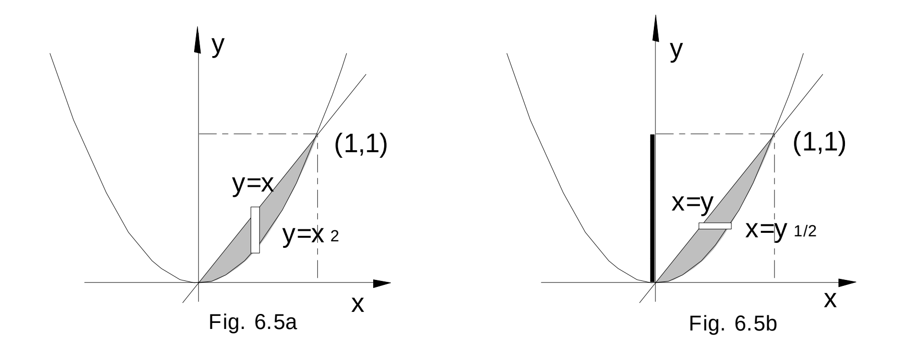



Fig. 6.5a Fig. 6.5b

***Procedimiento 1.*** *La región de integración está limitada inferiormente por la parábola $y = x^2$ y superiormente por la recta $y = x$ (Fig. ###).*
*Por tanto, integramos primeramente con respecto a $y$ desde $y = x^2$ hasta $y = x$, y luego con respecto de $x$; sobre la proyección de la región en el eje $x$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$.*

$$\begin{aligned}\int\int_A xydA &= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^2}^{y=x} xydydx = \int_0^1 \left.\frac{xy^2}{2}\right|_{y=x^2}^{y=x} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^3 - x^5\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

***Procedimiento 2.*** *La región de integración está limitada por la izquierda por la recta $y = x$ y por la derecha por la parábola $y = x^2$ (Fig. ###). Por tanto, integramos primeramente con respecto a $x$ desde $x = y$ hasta $x = \sqrt{y}$ (ó $y = x^2$) y luego con respecto a $y$, sobre la proyección de laregión en el eje $y$, desde $y = 0$ hasta $y = 1$:*

$$\begin{aligned}\int\int_A xydA &= \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=\sqrt{y}} xydxdy = \int_0^1 \left.\frac{x^2y}{2}\right|_{x=y}^{x=\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y^2 - y^3dy\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

### 6.1.2 Area de una región plana

El área de una región plana puede calcularse por medio de una integral doble. Notemos que si en (4)hacemos $f(x,y)=1$, obtenemos

$$\int\int_A dA = \lim_{n\to\infty}(A_1+A_2+...+A_n) \tag{6.7}$$

Como $A_1, A_2, ..., A_n$ son las áreas de las $n$ partes en que han sido dividida la región plana $A$, tenemos que el segundo miembro de (7) es el área de $A$. Es decir

$$\text{área de } A = \int\int_A dA = \int\int_A dxdy \tag{6.8}$$

**Example 58** *Hallar el área de la región limitada por los ejes coordenados,* $y = x^2$, $x = 3$.
*La región está limitada inferiormente por la recta* $y = 0$*, superiormente por la parábola* $y = x^2$*; además la proyección de* $A$ *sobre el eje* $x$ *va desde* $x = 0$ *hasta* $x = 3$*. Por tanto,*

$$Area\ de\ A = \int\int_A dA = \int_{x=0}^{x=3}\int_{y=0}^{y=x^2} dydx = \int_0^3 y\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^3 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = 9$$

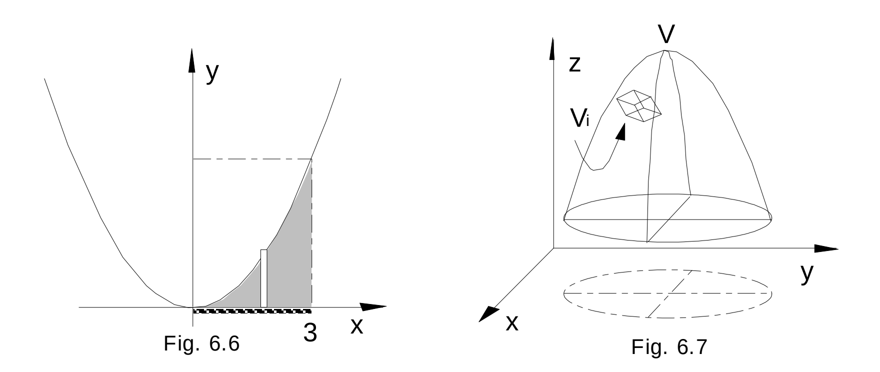


Fig. 6.6 Fig. 6.7

## 6.2 INTEGRALES TRIPLES

Ya hemos visto que el concepto de integral de una función de una sola variable sobre un intervalo se extiende de manera natural a la integral doble de una función de dos variables sobre una región plana. Con la misma naturalidad el concepto se extiende a funciones de tres variables sobre una región sólida del espacio.

Vamos a definir la integral de una función de tres variables sobre una región sólida $V$ del espacio. Consideremos una función $f(x,y,z)$ de $R^3$ en $R$ y definida

en una región sólida $V$ como en la Fig. ###. Dividamos $V$ en $n$ partes de volumen $V_1, V_2, ..., V_n$ respectivamente. De cada pedazo elijamos arbitrariamente un punto $(x_i, y_i, z_i)$ y formemos la suma.

$$S_n = f(x_1, y_1, z_1) V_1 + f(x_2, y_2, z_2) V_2 + ... + f(x_n, y_n, z_n) V_n \tag{6.9}$$

Si el límite de $S_n$ existe cuando el número de subdivisiones aumenta (es decir, $n \to \infty$) y los pedazos son cada vez más pequeños (es decir, $\max V_i \to 0$); entonces a tal límite es llamada integral triple de $f(x, y, z)$ sobre la región $V$ y se representa por

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV.$$

Es decir

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV = \lim_{n \to \infty} \left[ f(x_1, y_1, z_1) V_1 + ... + f(x_n, y_n, z_n) V_n \right] \tag{6.10}$$

Si el límite (10) existe, se dice que $f(x, y, z)$ es integrable sobre $V$. No todas las funciones son integrables; sin embargo, las funciones que son continuas en $V$ son integrables sobre $V$.

A pesar de que (10) define a la integral triple, no es muy útil para su cálculo. Por supuesto, siempre podemos hallar aproximadamente el valor de la integral triple de cualquier función integrable sobre una región $V$ por medio de la suma (9) (ver ejercicio 48).

### 6.2.1 Cálculo de las integrales triples

El cálculo de las integrales triples de la mayoría de las funciones que tratamos se reduce, como para las integrables dobles, al cálculo consecutivo o iterado de tres integrales simples tal como se establece en el siguiente teorema:

**Teorema 6.2** (Teorema fundamental de las Integrales Triples).

Si $f(x, y, z)$ es integrable sobre una región del espacio $V$, y si la región $V$ está limitada inferiormente por la superficie $z = z_1(x, y)$ y superiormente por la superficie $z = z_2(x, y)$; entonces

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV = \iint_A \left( \int_{z=z_1}^{z=z_2} f(x, y, z)\, dz \right) dydz \tag{11}$$

donde $A$ (en (11)) es la región del plano $xy$ que se obtiene al proyectar $V$ en

dicho plano. (Fig. ###).

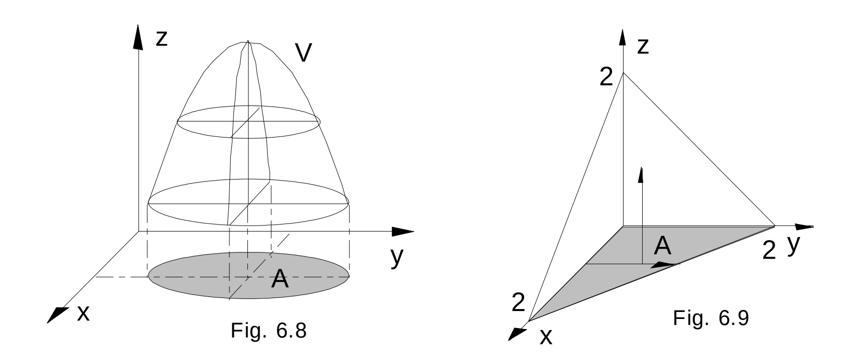


Fig. 6.8

Fig. 6.9

Los supuestos, como para las integrales dobles, según convenga, se puede cambiar el orden de integración en (11); en tal caso se deberá considerar la proyección sobre el plano coordenado de las dos variables que no han intervenido en la primera integración (ejercicio 69).

En general, la proyección $A$ sobre el plano $xy$ se obtiene eliminando la variable $z$ de entre las superficies que limitan $V$.

**Example 59** *Calcular* $\iiint_V zdV$*, si* $V$ *es la región limitada por* $x+y+z=2$ *y los planos coordenados* $x=0$*,* $y=0$*,* $z=0$ *(Fig. ###).*
*La región de integración* $V$ *está limitada inferiormente por el plano coordenado* $z=0$ *y superiormente por el plano* $z=2-x-y$ *(o* $x+y+z=2$*), entonces la primera integración se ha de efectuar con respecto a* $z$ *y entre estos límites (en la Fig. ### esto se indica con una flecha vertical punteada).*
*La proyección* $A$ *sobre el plano* $xy$ *es el triángulo limitado por las rectas* $x=0$*,* $y=0$*,* $x+y=2$*. En segundo lugar podemos integrar con respecto a* $y$ *desde la recta* $y=0$ *hasta la recta* $y=2-x$ *(ó* $x+y=2$*).*
*Finalmente, integramos con respecto de* $x$ *sobre el intervalo proyección de* $A$ *sobre el eje* $x$*, desde* $x=0$ *hasta* $x=2$*. Es decir,*

$$\begin{aligned}
\iiint_V zdV &= \int_0^2 \int_{y=0}^{y=2-x} \int_{z=0}^{z=2-x-y} zdzdydx = \int_0^2 \int_0^{2-x} \left.\frac{z^2}{2}\right|_{z=0}^{z=2-x-y} dydx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \int_0^{2-x} (2-x-y)^2\, dydx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left.(2-x-y)^3 / (-3)\right|_0^{2-x} dx \\
&= \frac{1}{6}\int_0^2 (2-x)^3\, dx = -\left.\frac{(2-x)^4}{6\cdot 4}\right|_0^2 = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Notemos que para hallar los límites de integración sobre una región $V$ del espacio, primeramente se integra de superficie a superficie en el espacio, luego

de curva a curva en un plano; y finalmente, de punto a punto en un intervalo. Es decir:

Los primeros límites de integración se hallan sobre el volumen $V$; para hallar los segundos límites de integración se proyecta $V$ sobre el plano de las variables que no han intervenido en la primera integración y los segundos límites de integración, se hallan sobre dicha proyección $A$. Finalmente, los últimos límites de integración se hallan sobre el intervalo que resulta de la proyección de $A$ sobre el eje de la variable que no ha intervenido en las dos anteriores integraciones.

### 6.2.2 Volumen de una región sólida

El volumen de una región sólida puede calcularse por medio de una integral triple. Si en (10) hacemos $f(x, y, z) = 1$ obtenemos

$$\iiint_V dV = \lim_{n \to \infty} (V_1 + V_2 + ... + V_n) \tag{6.11}$$

Como $V_1, V_2, ..., V_n$ son los volúmenes correspondientes a las $n$ partes en que a sido dividida la región sólida $V$, tenemos que el segundo miembro de (12) da el volumen de $V$. Es decir:

$$\text{volumen de } V = \iiint_V dV = \iiint_V dzdydx \tag{6.12}$$

**Example 60** *Hallar el volumen del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.*

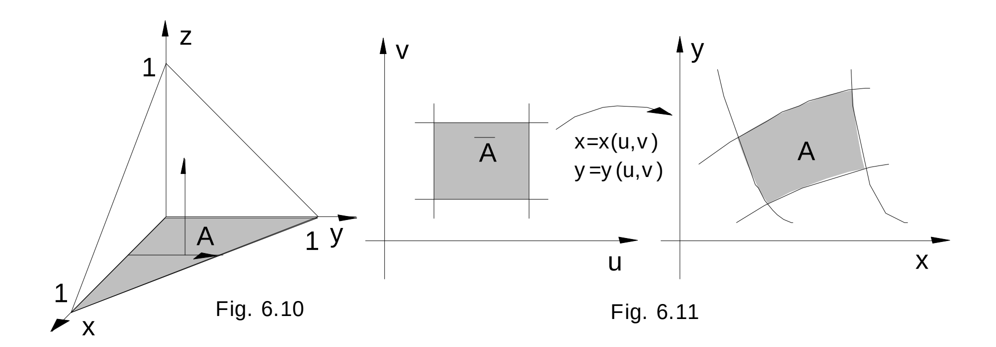


Fig. 6.10

Fig. 6.11

*El tetraedro está limitado inferiormente por el plano $z = 0$, superiormente por el plano $z = 1 - x - y$; la proyección sobre el plano $xy$ está limitada por la izquierda por la recta $y = 0$ y por la derecha por la recta $y = 1 - x$; la proyección sobre el eje $x$ va desde $x = 0$ hasta $x = 1$ (flechas punteadas en la Fig. ###).*

*Por tanto, integrando entre estos límites tenemos:*

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dV = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1-x}\int_{z=0}^{z=1-x-y} dzdydx \\ &= \int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dydx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

### 6.2.3 Cambio de variables en integrales múltiples

Para funciones dependientes de una sola variable, por medio de un cambio de variable $x = x(u)$ se ha podido calcular, en el cálculo $I$, integrales complicadas transformándolas en otras más sencillas que pueden calcularse más fácilmente. Recordemos que la fórmula es:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(u))\,x'(u)\,du \tag{6.13}$$

donde $u(x) = a$, $u(d) = b$ (es decir, la imágen del intervalo $[c, d]$ es el intervalo $[a, b]$).

Notemos que en lugar de integrar sobre el intervalo original $[a., b]$, después del cambio de variable está dada por más de una ecuación.

### 6.2.4 Formula del cambio de variable para integrales dobles

Si de las variables $x, y$ se pasa a las variables $u, v$ mediante las ecuaciones de transformación $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ entonces la transformación de la integral de $f(x, y)$ sobre la región $A$ está dada por

$$\int\int_A f(x,y)\,dxdy = \int\int_{\overline{A}} f(x(u,v), y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \tag{6.14}$$

donde la imagen de la región $\overline{A}$, por medio del cambio de variable, es la región original $A$ (Fig. ###), y además el factor $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$, que desempeña el papel de $x'(u)$ en (14), es el valor absoluto del determinante jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ dado por

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \tag{6.15}$$

Notemos que el determinante jacobiano (16) es el determinante de la matriz jacobiana de la transformación que efectúa el cambio de variable.

Geométricamente, el valor absoluto del determinante jacobiano mide la contracción o dilatación de la región $\overline{A}$, del plano $uv$, al transformarse en la región

$A$ del plano $xy$. Por ejemplo si $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 2$ en todo $\overline{A}$, significa que el área de $A$ es el doble de $\overline{A}$. Si el valor de $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ varía según el punto, significa que la contracción o dilatación de $\overline{A}$ mediante la transformación varía según el punto. Por esta razón, al determinante jacobiano puede considerarse como el "factor de proporcionalidad de áreas" del cambio de variable efectuado (Ejercicio 47).

De (15) tenemos que cuando se efectúa un cambio de varaible se debe expresar la función $f$ en términos de las nuevas variables, $u$, $v$ y multipliarla por $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ que se calcula según (16).

Algunos determinantes jacobianos que se usan frecuentemente son:

Para: Coordenadas Polares:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \tag{6.16}$$

Para: $a > 0, b > 0$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = ab \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \dfrac{x}{a} = u \\ \dfrac{y}{b} = v \end{array} \tag{6.17}$$

(ver ejercicios 32 y 35).

Algunas veces, cuando las variables originales no están despejadas en las ecuaciones que efectúan el cambio de variables, es conveniente saber que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} \tag{6.18}$$

(ver ejercicios, 31, 33, 34, 43 y ejercicio propuesto 95).

En general, la elección de un cambio de variable específico está sugerido por la forma de las ecuaciones de las curvas que limitan a la región de integración y/o por la forma de la función que se integra. Por ejemplo el cambio a las coordenadas polares (17a) puede ser muy útil cuando se integra sobre regiones limitadas por circunferencias, mientras que el cambio (17b) suele utilizarse para transformar elipses en circunferencias.

### 6.2.5 Fórmula del cambio de variable para integrales triples

La fórmula del cambio de variable para integrales tripes es el mismo tipo que para las integrales dobles. Si el cambio de variable se efectúa mediante las ecuaciones $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$; entonces el cambio en la integral triple de $f(x,y,z)$ sobre la región sólida $V$ está dada por

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = \iiint_{\overline{V}} f(x,y,z)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw \tag{6.19}$$

donde la imagen de $\overline{V}$, mediante el cambio de variable, es la región original $V$; el factor $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|$ es el valor absoluto del determinante jacobiano $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ dado por

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \tag{6.20}$$

Geométricamente, el valor absoluto del determinante jacobiano (20) es el "factor de proporcionalidad de volúmenes" del cambio de variable efectuado. Algunos que se usan frecuentemente son:

Para: Coodenadas cilíndricas

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,z)}\right| = r \quad ; \quad \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array} \tag{6.21}$$

Para: Coordenadas esféricas

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}\right| = \rho^2\sin\theta \quad ; \quad \begin{array}{c} x = \rho\cos\theta\sin\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\phi \end{array} \tag{6.22}$$

Para: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = abc \quad ; \quad \begin{array}{c} x/a = u \\ y/b = v \\ z/c = w \end{array} \tag{6.23}$$

En general la elección del cambio de variable depende de la forma de las ecuaciones de las superficies que limitan la región de integración y/o de la forma de la función que se integra. El cambio a coordenadas cilíndricas (21) puede ser conveniente cuando se integra sobre regiones limitadas por cilindros, conos y paraboloides; el paso a coordenadas esféricas suele efectuarse cuando la región de integración está limitada por esferas y, a veces, cilindros. El cambio (23) transforma elipsoides en esferas (ver ejercicio 61).

## 6.3 MASA. DENSIDAD MEDIA. CENTRO DE GRAVEDAD. CENTROIDE. MOMENTOS

Consideremos una "fina lámina" que tenga la forma de una región plana $A$. Si la lámina o placa está construida con un material homogéneo, la densidad ó (masa por unidad de área) es constante y en tal caso la masa total es el producto de la densidad por el área de la lámina.

Si la densidad $\delta(x,y)$ varía de un punto a otro, entonces la **masa** total de la lámina está dada por

$$m = \iint_A \delta(x,y)\,dxdy \tag{6.24}$$

La **densidad media** $\overline{\delta}$ de la lámina está dada por el cociente.

$$\overline{\delta} = \frac{\text{masa}}{\text{área}} = \frac{\displaystyle\iint_A \delta(x,y)\,dxdy}{\displaystyle\iint_A dxdy} \tag{6.25}$$

El **centro de gravedad**, de coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$, teóricamente es un punto de equilibrio de la lámina y sus coordenadas están dadas por

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint_A x\delta(x,y)\,dxdy}{\displaystyle\iint_A \delta(x,y)\,dxdy} \quad ; \quad \overline{y} = \frac{\displaystyle\iint_A y\delta(x,y)\,dxdy}{\displaystyle\iint_A \delta(x,y)\,dxdy} \tag{6.26}$$

La integrales de los numeradores de (25) son los **momentos** de la lámina respecto al eje $y$ y al eje $x$, respectivamente. Cuando la densidad es constante, $\delta(x,y) = c$, las fórmulas (25) se simplifican y tenemos

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint_A xdxdy}{\displaystyle\iint_A dxdy} \quad ; \quad \overline{y} = \frac{\displaystyle\iint_A ydxdy}{\displaystyle\iint_A dxdy} \tag{6.27}$$

En este caso, cuando la densidad es constante, el punto $(\overline{x}, \overline{y})$ se llama **centroide** o **centro geométrico** de la lámina.

Por otra parte, si $L$ es una recta en el plano de la lámina y $d(x,y)$ es la distancia del punto $(x,y)$ de la lámina a la recta $L$, entonces el **momento de inercia** $I_L$ de la lámina respecto a $L$ está dado por

$$I_L = \iint_A d^2(x,y)\,\delta(x,y)\,dxdy \tag{6.28}$$

Si en (27) se tiene $\delta(x,y) = 1$, el momento de inercia $I_L$ se llama también **segundo momento** de la lámina $A$ respecto a $L$. En particular los momentos de inercia respecto a los ejes $x$ e $y$ se representan por $I_x$ e $I_y$ respectivamente; y están dadas por

$$I_x = \iint_A y^2\delta(x,y)\,dxdy \quad ; \quad I_y = \iint_A x^2\delta(x,y)\,dxdy \tag{6.29}$$

La suma de estos momentos se llama **momento polar de inercia** respecto al origen y se representa por $I_0$:

$$I_0 = I_x + I_y = I_x = \iint_A \left(x^2 + y^2\right)\delta(x,y)\,dxdy \tag{6.30}$$

Debemos tener en cuenta que la masa y el centro de gravedad de una lámina no dependen de la posición del origen de coordenadas, ni de las direcciones de

los ejes coordenados. El momento polar de inercia depende únicamente de la posición del origen y no de las direcciones de los ejes coordenados, mientras que los momentos y momento de inercia respecto a los ejes $x$ e $y$ dependen de la posición del origen y de las direcciones de los ejes.

Si la lámina es de densidad constante y tiene un eje de simetría, entones su centroide $(\overline{x}, \overline{y})$ estará en dicho eje de simetría; si tiene dos ejes de simetría, el centroide estará en la intersección de tales ejes de simetría. Estas propiedades pueden usarse para simplificar los cálculos (ejercicio 36, 38).

La masa, centro de gravedad, momentos, etc. de un sólido están dados por fórmulas análogas a las correspondientes a regiones planas, donde intervienen integrales triples (ejercicios 72, 73 y 74).

## 6.4 TEOREMA DE PAPPUS

El teorema de Pappus relaciona al centroide de una región plana con el volumen del sólido de revolución generado al girar la región plana alrededor de una recta de su plano. En forma precisa:

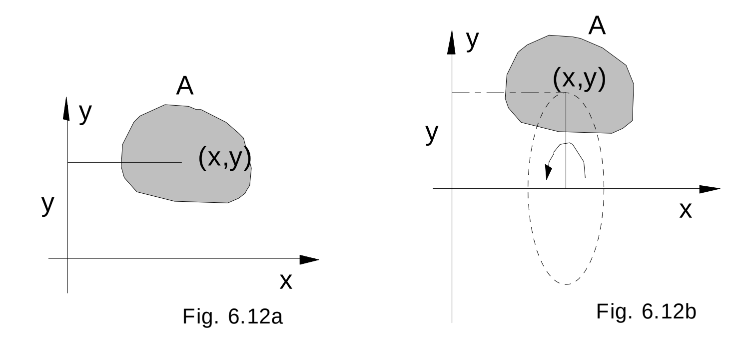


Fig. 6.12a Fig. 6.12b

El volumen generado al girar una región plana arededor de un eje de su plano que no la corte es igual al producto del área de la región por la longitud de la circunferencia descrita por su centroide.

En particular, si una región plana como la de la Fig. ### gira alrededor del eje $x$, entonces al girar la región plana para engendrar el sólido de revolución, el centroide se desplaza a lo largo de una circunferencia de radio $\overline{y}$ (Fig. ###). Entonces, el volumen $V$ es igual al producto de la longitud de dicha circunferencia multiplicada por el área $A$; es decir

$$V = 2\pi\overline{y}A \tag{6.31}$$

El teorema de Pappus puede usarse en algunos casos para calcular volúmenes y en otros para determinar centroides.

**Nota**. Por supuesto, el teorema de Pappus se aplica cuando la densidad es constante.

Ejemplo 6.6. El area del semidisco superior $x^2+y^2 = R^2$, $y \geq 0$ es $A = \dfrac{\pi}{2}R^2$. Al girar alrededor del eje $x$ genera una esfera de radio $R$ cuyo volumen es $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

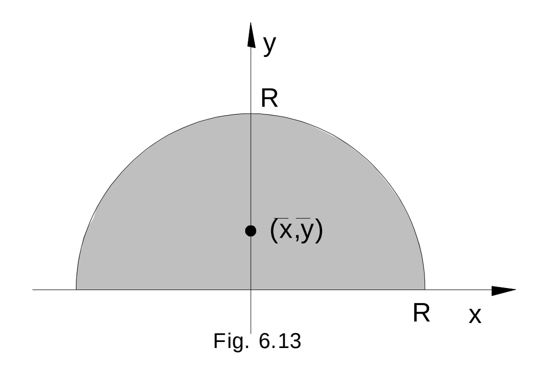


Fig. 6.13

Por el teorema de Pappus tenemos:

$$V = 2\pi\overline{y}A \Longrightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi\overline{y}\frac{\pi}{2}R^2$$

despejando $\overline{y}$

$$\overline{y} = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$$

Además, como el eje $y$ es un eje de simetría del semidisco, el centroide está en dicho eje y por tanto $\overline{x} = 0$. Luego, el centroide del semidisco es $(\overline{x}, \overline{y}) = \left(0, \dfrac{4}{3}\dfrac{R}{\pi}\right)$.

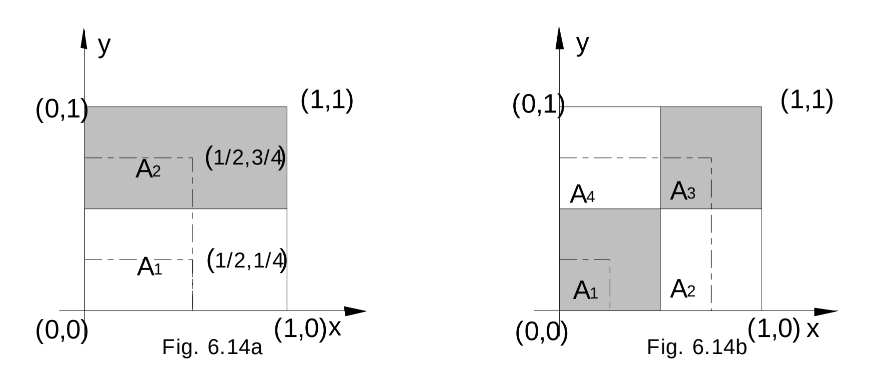
## 6.5 EJERCICIOS RESUELTOS

### INTEGRALES DOBLES

1. Sea $A$ el cuadrado con vértice en $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. Calcular aproximadamente el valor de la integral

$$\iint_A \left(x^2 + y\right) dA$$

a) dividiendo $A$ en dos partes. b) dividiendo $A$ en cuatro partes.




Solución. a) Dividamos $A$ en dos partes $A_1$ y $A_2$ como en la Fig. ###. Del pedazo inferior elegimos el punto $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ y del pedazo superior el punto $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$. Los áreas de $A_1$ y $A_2$ son $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\iint_A \left(x^2 + y\right) dA &\simeq f(x_1, y_1) A_1 + f(x_2, y_2) A_2 = \left(x_1^2 + y_1\right) A_1 + \left(x_2^2, y_2\right) A_2 \\ &= \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{2} + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

b) Dividamos $A$ en cuatro partes $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ como en la Fig. ###. Elijamos un punto de cada pedazo:

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

Como el área de cada pedazo es $\frac{1}{4}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\iint_A \left(x^2 + y\right) dA &\simeq f(x_1, y_1) A_1 + f(x_2, y_2) A_2 + f(x_3, y_3) A_3 + f(x_4, y_4) A_4 \\ &= \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{4} + \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{4} + \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)\frac{1}{4} + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{13}{16},\end{aligned}$$

después de simplificar.

**CALCULO DE INTEGRALES DOBLES**

En los ejercicios 2 - 8 se calculan integrales iteradas.

2. $\int_1^2 \int_0^1 xydxdy.$

Solución. Integrando con respecto a $x$ manteniendo $y$ constante:

$$\int_1^2 \int_0^1 xydxdy = \int_1^2 \left.\frac{x^2}{2}y\right|_0^1 dy = \int_1^2 \frac{y}{2}dy = \left.\frac{y^2}{4}\right|_1^2 = \frac{3}{4}$$

3. $\displaystyle\int_2^4 \int_1^3 xydydx.$

Solución. Integrando con respecto a $y$, manteniendo $x$ constante

$$\int_2^4 \int_1^3 xydydx = \int_2^4 \left.x\frac{y^2}{2}\right|_1^3 dx = \int_2^4 4xdx = \left.\frac{4x^2}{2}\right|_2^4 = 24$$

4. $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^x dydx.$

Solución.

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x dydx = \int_0^1 \left.y\right|_{x^2}^x dx = \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx = \left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

5. $\displaystyle\int_1^2 \int_y^{3y} (x+y)\,dxdy.$

Solución.

$$\int_1^2 \int_y^{3y} (x+y)\,dxdy = \int_1^2 \left.\frac{x^2}{2} + xy\right|_y^{3y} dy = \int_1^2 6y^2dy = \left.\frac{6y^3}{3}\right|_1^2 = 14$$

6. $\displaystyle\int_{-1}^2 \int_{2x^2-2}^{x^2+x} xdydx.$

Solución.

$$\int_{-1}^2 \int_{2x^2-2}^{x^2+x} xdydx = \int_{-1}^2 \left.xy\right|_{2x^2+2}^{x^2+x} dx = \int_{-1}^2 \left(-x^3 + x^2 + 2x\right) dx$$

$$= \left.\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right|_{-1}^2 = \frac{9}{4}$$

7. $\displaystyle\int_0^\pi \int_2^{\cos\theta} r\sin\theta drd\theta.$

Solución.

$$\int_0^\pi \int_2^{\cos\theta} r\sin\theta drd\theta = \int_0^\pi \left.\frac{r^2}{2}\sin\right|_0^{\cos\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta d\theta = \frac{1}{2} \left.-\frac{\cos^3\theta}{3}\right|_0^\pi$$

$$= -\frac{1}{3}$$

8. $\int_0^{\pi/2}\int_2^{4\cos\theta} r^3 dr d\theta.$
Solución.

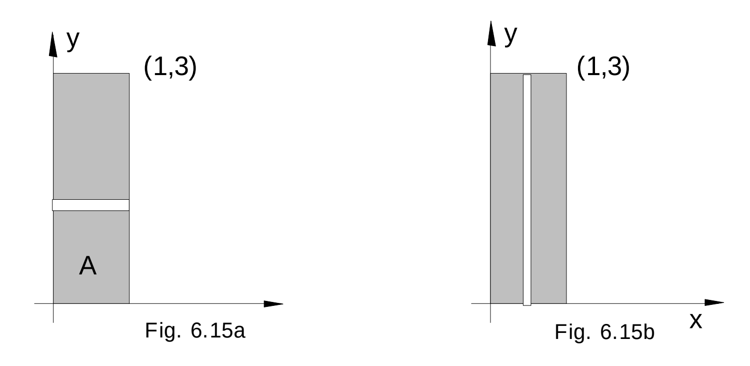
$$\int_0^{\pi/2}\int_2^{4\cos\theta} r^3 dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left.\frac{r^4}{4}\right|_2^{4\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(64\cos^4\theta - 4\right) d\theta$$

consultando una tabla de integrales

$$= \left.\left[64\left(\frac{3\theta}{8} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\sin 4\theta}{32}\right) - 4\theta\right]\right|_0^{\pi/2} = 10\pi$$

En los ejercicios 9-16 se calculan integrales dobles sobre una región plana por medio de integrales iteradas.

9. $\iint_A y^2 dA$ siendo $A$ el rectángulo limitado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 3$.




Solución. **Procedimiento 1**. Como el rectángulo $A$, que es la región de integración, está limitada por la izquierda por la recta $x = 0$ y por la derecha por la recta $x = 1$, primeramente integramos con respecto de $x$ (línea punteada en la Fig. ###). Con respecto de $y$ se integra en la proyección del rectángulo sobre el eje $y$, que va de $y = 0$ hasta $y = 1$ (intervalo rayado en la Fig. ###). Por tanto:

$$\iint_A y^2 dA = \int_0^3\int_0^1 y^2 dx dy = \int_0^3 \left. y^2 x\right|_0^1 dy = \int_0^3 y^2 dy = \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^3 = 9$$

**Procedimiento 2**. El rectángulo $A$ está limitado inferiormente por la recta $y = 0$ y superiormente por la recta $y = 3$. Entonces primeramente integramos con respecto de $y$ entre estos lìmites (línea punteada en la Fig. ###). Con respecto de $x$ integramos en la proyección del rectángulo

sobre el eje $x$, que va desde $x = 0$ hasta $x = 1$ (intervalo rayado en la Fig. ###). Por tanto

$$\iint_A y^2 dA = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=3} y^2 dy dx = \int_0^1 \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^3 dx = \int_0^1 9dx = \left. 9x \right|_0^1 = 9$$

10. Calcular $\iint_A (x + 2y)\, dA$ si $A$ es el triángulo limitado por $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

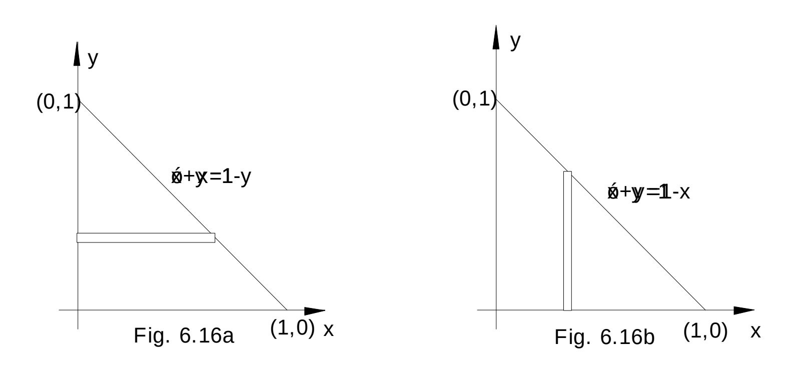


Fig. 6.16a Fig. 6.16b

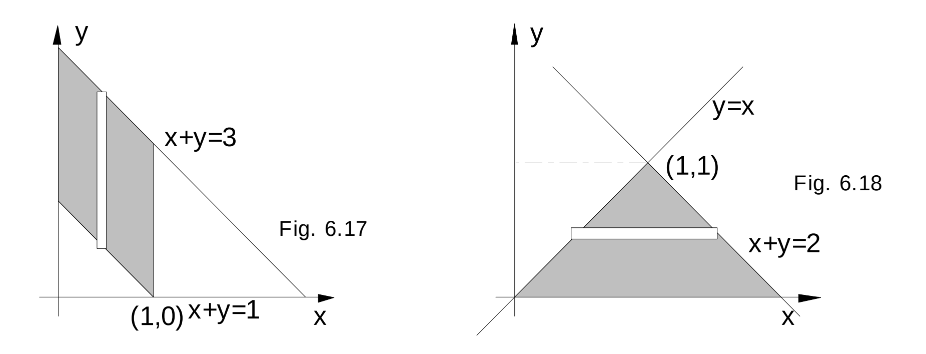
Solución. **Procedimiento 1**. El triángulo está limitado por la izquierda por la recta $x = 0$ y por la derecha por la recta $x = 1 - y$; entonces integramos primero con respecto a $x$ entre estos límites (línea punteada en la Fig. ###). Con respecto a $y$ integramos en la proyección del triángulo sobre el eje $y$ (intervalo rayado en la Fig. ###). Por tanto,

$$\begin{aligned} \iint_A (x + 2y)\, dA &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1-x} (x + 2y)\, dy dx = \int_0^1 \left. (xy) + y^2 \right|_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 (1 - x)\, dx = \left. \left( x - \frac{x^2}{2} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Nota**. Notemos que en los límites de integración la variable respecto a la cual se integra debe estar despejada.

11. Calcular $\iint_A (2x - y)\, dA$ si $A$ es el cuadrilátero limitado por $x = 0$,

$x = 1$, $x + y = 1$, $x + y = 3$.




Solución. Como la región de integración está limitada inferiormente por la recta $y = 1 - x$ y superiormente por la recta $y = 3 - x$; entonces integramos primero con respecto de $y$ entre estos límites (línea punteada Fig. ###). Con respecto de $x$ integramos en la proyección de la región de integración sobre el eje $x$ que va desde $x = 0$ hasta $x = 1$. Por tanto

$$\begin{aligned}\iint_A (2x - y)\,dA &= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=1-x}^{y=3-x} (2x - y)\,dydx = \int_0^1 \left(2xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{1-x}^{3-x} dx \\ &= \int_0^1 (6x - 4)\,dx = 6\frac{x^2}{2} - 4x\Bigg|_0^1 = -1\end{aligned}$$

**Nota**. En este caso no conviene integrar primero con respecto a $x$ porque la región de integración está limitada por dos curvas (dadas por dos ecuaciones) por la izquierda. Lo mismo ocurre con las curvas que la limitan por la derecha.

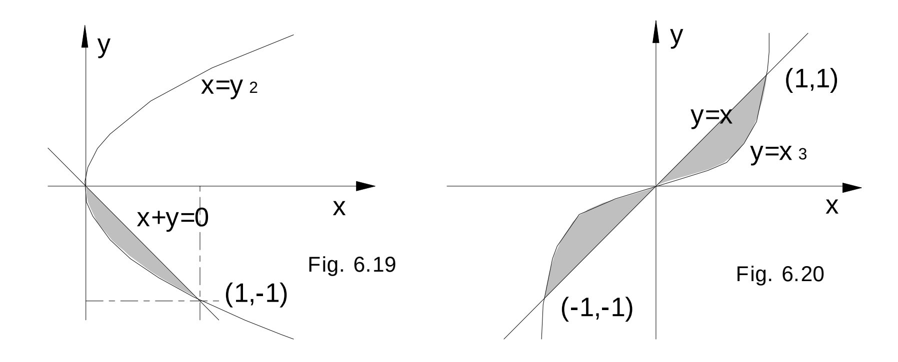
12. Hallar $\iint_A (1 + x)\,dA$, si $A$ es el triángulo limitado por $y = x$, $x + y = 2$, $y = 0$.
Solución. Como la región de integración está limitada por la izquierda por la recta $x = y$ y por la derecha por la recta $x = 2 - y$, entonces integramos primero con respecto a $x$ (línea punteada Fig. ###). Con respecto $y$ integramos en la proyección del triángulo sobre el eje $y$ que va desde $y = 0$

hasta $y = 1$ (intervalo rayado, Fig. ###). Por tanto,

$$\iint_A (1+x)\,dA = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=2-y}(1+x)\,dxdy = \int_0^1 \left.\frac{(1+x)^2}{2}\right|_y^{2-y} dy$$
$$= \int_0^1 (4-4y)\,dy = 4\left.\left(y - \frac{y^2}{2}\right)\right|_0^1 = 2$$

**Nota**. En este caso no conviene integrar primero con respecto de $y$ porque la región de integración está limitada superiormente por dos curvas (dadas por dos ecuaciones).

13. Hallar $\iint_A (x+y)\,dA$, siendo $A$ la región limitada por $x = y^2$, $x+y = 0$.




Solución. Como la región de integración está limitada por la izquierda por la parábola $x = y^2$ hasta la recta $x = -y$; entonces integramos primero con respecto de $x$ entre estos límites (línea punteada Fig. ###). Con respecto de $y$ integramos en la proyección de la región sobre el eje $y$ que va desde $y = -1$ hasta $y = 0$. Por tanto

$$\iint_A (x+y)\,dA = \int_{y=-1}^{y=0}\int_{x=y^2}^{x=-y}(x+y)\,dxdy = \int_{-1}^{0} \left.\frac{x^2}{2} + xy\right|_{y^2}^{-y} dy = -\frac{1}{2}\int_0^{-1}\left(y^4 + 2y^3 + y^2\right) dy$$
$$= -\frac{1}{2}\left.\left(\frac{y^5}{5} + \frac{2y^4}{4} + y^3\right)\right|_0^{-1} = -\frac{1}{60}$$

14. Calcular $\iint_A xy dA$, donde $A$ es la región limitada por $y = x^3$, $y = x$.
Solución. La porción que está sobre el primer cuadrante está limitada inferiormente por la curva $y = x^3$ y superiormente por la curva $y =$

$x$, entonces integramos primero con respecto a $y$ entre estos límites; la proyección sobre el eje $x$ de esta porción va desde $x = 0$ hasta $x = 1$.
Por otra parte, la porción que está en el tercer cuadrante está limitada inferiormente por $y = x$ y superiormente por $y = x^3$, entonces se va a integrar primero con respecto a $y$ entre estos límites. La proyección de esta porción sobre el eje $x$ va de $x = -1$ a $x = 0$.
Por tanto, sumando las integrales sobre cada porción tenemos:

$$\begin{aligned}\iint_A xy dA &= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^3}^{y=x} xydydx + \int_{x=-1}^{x=0}\int_{y=x}^{y=x^3} xydydx = \int_0^1 x\left.\frac{y^2}{2}\right|_{x^3}^{x} dx + \int_{-1}^{1} x\left.\frac{y^2}{2}\right|_{x}^{x^3} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^3 - x^7\right) dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(x^7 - x^3\right) dx = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

15. Hallar $\iint_A (x - y)\, dA$, si $A$ es la región limitada por $x = y^2$, $y = x^3$.

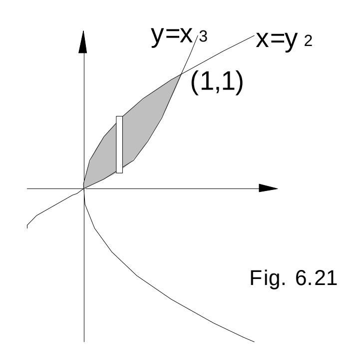


Fig. 6.21

Solución. La región de integración está limitada inferiormente por la curva $y = x^3$ y superiormente por la parábola $y = \sqrt{x}$ (o $x = y^2$), entonces integramos primero con respecto de $y$ entre estos límites (línea puntead Fig. ###).
Con respecto de $x$ integramos en la proyección sobre el eje $x$ que va desde $x = 0$ hasta $x = 1$ (intervalo rayado, Fig. ###). Por tanto,

$$\begin{aligned}\iint_A (x-y)\, dA &= \int_{x=0}^{x=1}\int_{x=x^3}^{y=\sqrt{x}} (x-y)\, dydx = \int_0^1 \left.\left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\right|_{x^3}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(x^{3/2} - x^4 - \frac{x}{2} + \frac{x^6}{2}\right) d \\ &= \left. 2\frac{x^{5/2}}{5} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^7}{14}\right|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{14} = \frac{3}{140}\end{aligned}$$

16. Hallar $\iint_A x^2 dA$, si $A$ es la región del primer cuadrante limitada por la hipérbola $xy = 16$ y las rectas $x = y$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 8$.

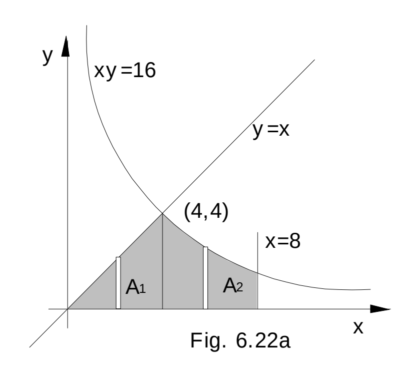


Fig. 6.22a

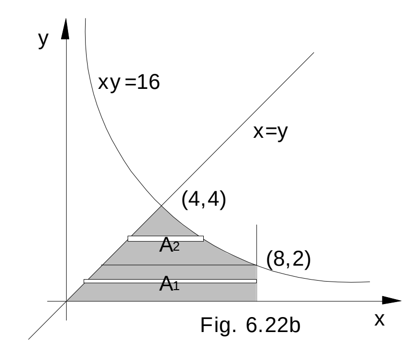


Fig. 6.22b

Solución. Notemos que tanto por la derecha como superiormente la región de integración está limitada por dos curvas (dadas por dos ecuaciones), entonces es necesario dividir la región en dos partes.
**Procedimiento 1**. Dividamos la región $A$ como en la Fig. ###, en dos regiones $A_1$ y $A_2$.
La región $A_1$ está limitada inferiormente por la recta $y = 0$ y superiormente por la recta $y = x$, integramos con respecto de $y$ entre estos límites. Con respecto de $x$ integramos en la proyección sobre el eje $x$ que va desde $x = 0$ hasta $x = 4$.
Por otra parte, la región $A_2$ está limitada inferiormente por la recta $y = 0$ y superiormente por la hipérbola $y = \frac{16}{x}$, entonces integramos primero con respecto de $y$ entre estos límites.
Con respecto de $x$ integramos en la proyección de $A_2$ sobre el eje $x$ que va desde $x = 4$ hasta $x = 8$.
Sumando las integral sobre $A$:

$$\begin{aligned}\iint_A x^2 dA &= \int_{x=0}^{x=4}\int_{y=0}^{y=x} x^2 dy dx + \int_{x=4}^{x=8}\int_{y=0}^{y=16/x} x^2 dy dx = \int_0^4 x^2\ y\big|_0^4\, dx + \int_4^8 x^2\ y\big|_0^{16/x}\, dx \\ &= \int_0^4 x^3 dx + \int_4^8 16x dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^4 + 16\ \left.\frac{x^2}{2}\right|_4^8 = 64 + 8\,(64 - 16) = 448\end{aligned}$$

**Procedimiento 2**. Dividamos la región $A$ como en la Fig. ### en dos regiones $A_1$ y $A_2$. Integramos primero con respecto de $x$ y luego con

respecto de $y$ sobre $A_1$ y $A_2$ y luego sumando, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\iint_A x^2 dA &= \int_{y=0}^{y=2}\int_{x=y}^{x=8} x^2 dxdy + \int_{y=2}^{y=4}\int_{x=y}^{x=16/y} x^2 dxdy = \int_0^2 \left.\frac{x^3}{3}\right|_y^8 dy + \int_2^4 \left.\frac{x^3}{3}\right|_y^{16/y} dy \\
&= \frac{1}{3}\int_0^2 \left(512 - y^3\right) dy + \frac{1}{3}\int_2^4 \left(\frac{4096}{y^3} - y^3\right) dy \\
&= \frac{1}{3}\left(512y - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{4096}{-2y^2} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_2^4 = 448
\end{aligned}$$

En los ejercicios 17 - 20 se invierte el orden de integración de una integral iterada.

17. Graficar la región de integración e invertir el orden de integración $\int_0^2 \int_0^{2x} f(x, y)\, dydx$.

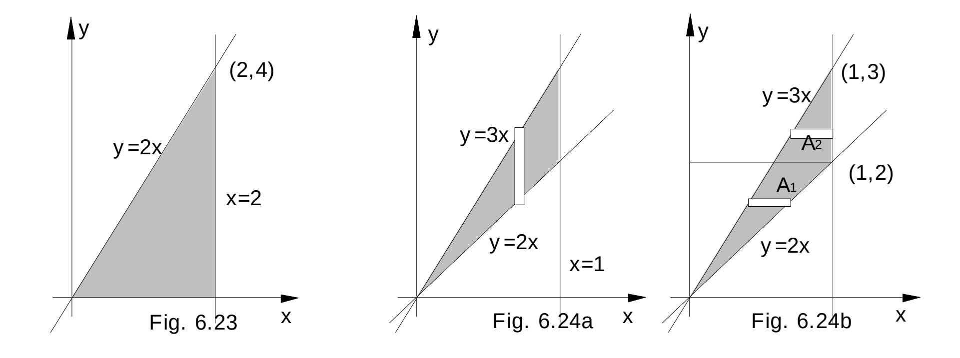


Fig. 6.23 Fig. 6.24a Fig. 6.24b

Solución. Como

$$\int_0^2 \int_0^{2x} f(x, y)\, dydx = \int_{x=0}^{x=2}\int_{y=0}^{y=2x} f(x, y)\, dydx$$

considerando los límites de integración deducimos que la región de integración está limitada inferiormente por la recta $y = 0$ y superiormente por la recta $y = 2x$. Además $x$ varía entre $x = 0$ y $x = 2$. La región de integración se muestra en la Fig. ###.
Invirtamos el orden de integración; como la región está limitada por la izquierda por $x = \frac{y}{2}$ y por la derecha por $x = 2$, entonces integramos con respecto de $x$ entre estos límites. Con respecto de $y$ integramos en la proyección de la región sobre el eje $y$, que va desde $y = 0$ hasta $y = 4$. Por

tanto:

$$\int_0^2 \int_0^{2x} f(x,y)\, dydx = \int_{y=0}^{y=4} \int_{x=y/2}^{x=2} f(x,y)\, dxdy = \int_0^4 \int_{y/2}^{2} f(x,y)\, dxdy$$

18. Graficar la región de integración e invertir el orden de integración:

$$\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)\, dydx$$

Solución. Como

$$\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)\, dydx = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=2x}^{y=3x} f(x,y)\, dydx$$

considerando los límites de integración deducimos que la región de integración está limitada inferiormente por la recta $y = 2x$ y superiormente por la recta $y = 3x$. Además $x$ varía entre $x = 0$ y $x = 4$. La región de integración se muestra en la Fig. ###. Invirtiendo el orden de integración: Como la región está limitada por la derecha por dos curvas (dadas por dos ecuaciones) debemos dividir la región de integración en dos partes $A_1$ y $A_2$ como en la Fig. ###. La región $A_1$ está limitada por la izquierda por la recta $x = \frac{y}{3}$ y por la derecha por $x = \frac{y}{2}$; entonces integramos primero con respecto de $x$ entre estos límites. Con respecto de $y$ integramos en la proyección de $A_1$ sobre el eje $y$ que va desde $y = 0$ hasta $y = 2$. La región $A_2$ está limitada por la izquierda por $x = \frac{y}{3}$ y por la derecha por la recta $x = 1$, entonces integramos primero respecto de $x$ entre estos límites. Con respecto de $y$ integramos en la proyección de $A_2$ sobre el eje $y$ que va desde $y = 2$ hasta $y = 4$. Por tanto:

$$\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)\, dydx = \int_0^2 \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\, dxdy + \int_2^3 \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)\, dxdy$$

19. Graficar la región de integración e invertir el orden de integración:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\, dxdy$$

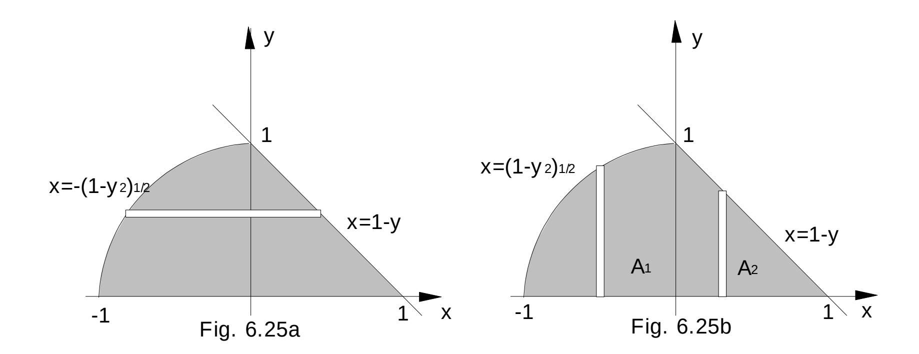


Fig. 6.25a Fig. 6.25b

Solución. Como

$$\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f\left(x,y\right)dxdy = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=1-y} f\left(x,y\right)dxdy$$

considerando los límites de integración deducimos que la región de integración está limitada por la izquierda por la curva $x=-\sqrt{1-y^2}$ y por la derecha por la recta $x=1-y$. Además $y$ varía desde $y=0$ hasta $y=1$. La región de integración se muestra en la Fig. ###.
Para invertir el orden de integración: dividimos la región de integración en dos partes $A_1$ y $A_2$ como se ven en la Fig. ###.
La región $A_1$ está limitada inferiormente por la recta $y=0$ y superiormente por la curva $y=\sqrt{1-x^2}$ (que se obtiene de $x=-\sqrt{1-y^2}$), entonces integramos primero con respecto a $y$ entre estos límites. Con respecto de $x$ integramos en la proyecci{on de $A_1$ sobre el eje $x$ que va desde $x=-1$ hasta $x=0$.
Por otra parte, la región $A_2$ está limitada inferiormente por la recta $y=0$ y superiormente por la recta $y=1-x$; entonces integramos primero con respecto de $y$ entre estos límites. Con respecto de $x$ integramos en la proyección de $A_2$ sobre el eje $x$ que va desde $x=0$ hasta $x=1$.
Por tanto, sumando las integrales sobre $A_1$ y $A_2$ tenemos:

$$\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f\left(x,y\right)dxdy = \int_{1}^{0}\int_{0}^{1-x^2} f\left(x.y\right)dydx + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} f\left(x,y\right)dydx$$

20. Calcular $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dxdy$ invirtiendo previamente el orden de integración.

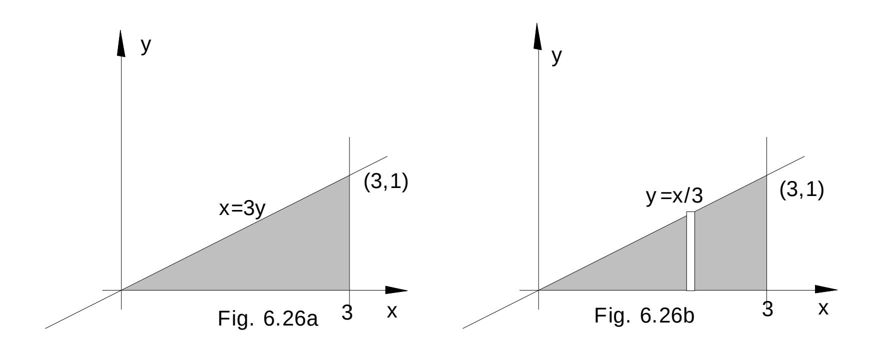


Fig. 6.26a Fig. 6.26b

Solución. Como

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dxdy = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=3y}^{x=3} e^{x^2} dxdy$$

considerando los límites de integración deducimos que la región de integración está limitada por la izquierda por la recta $x = 3y$ y por la derecha por la recta $x = 3$. Además, $y$ varía desde $y = 0$ hasta $y = 1$.
La región de integración se muestra en la Fig. ###. Invirtiendo el orden de integración: como la región de integración está limitada inferiormente por la recta limitada inferiormente por la recta $y = 0$ y superiormente por la recta $y = \frac{x}{3}$, entonces integramos primero con respecto de $y$ entre estos límites. Con respecto de $x$ integramos en la proyección de la región sobre el eje $x$ que va desde $x = 0$ hasta $x = 3$ (Fig. ###). Por tanto, invirtiendo el orden de integración y calculando:

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dxdy = \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=\frac{x}{3}} e^{x^2} dydx = \int_0^3 e^{x^2} y\Big|_0^{\frac{x}{3}} dx = \frac{1}{3}\int_0^3 xe^{x^2} dx = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^3 = \frac{1}{6}\left(e^9 - 1\right)$$

**Nota**. Notemos que si previamente no se invierte el orden de integración, el cálculo de la integral es dificultosa.
En los ejercicios 21 - 35 se calculan áreas de regiones planas.

21. Hallar el área de la región limitada por las rectas $y = 2x$, $x + y = 2$, $y = 0$.

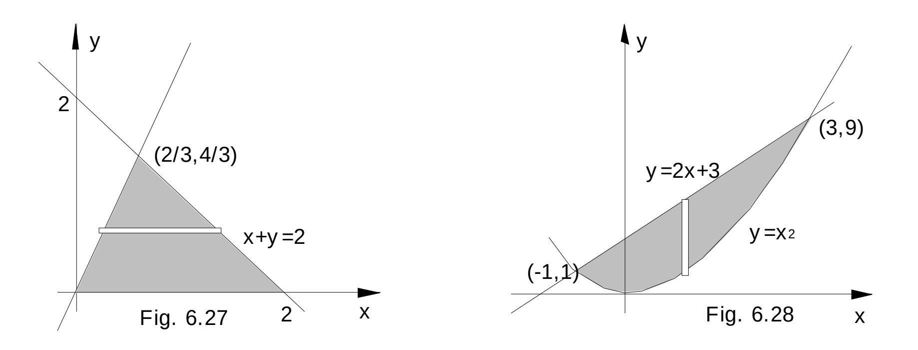


Fig. 6.27 Fig. 6.28

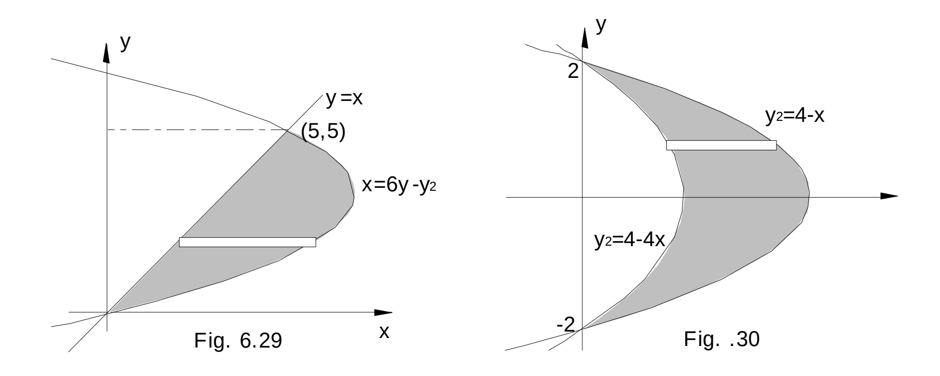
Solución. La región está limitada por la izquierda por la recta $x = \frac{y}{2}$ (que se obtiene de $y = 2x$) y por la derecha por la recta $x = 2 - y$ (que se obtiene de $x + y = 2$). Entonces integramos primeramente con respecto de $x$ entre estos límites. Con respecto de $y$ integramos en la proyección sobre el eje $y$ que va desde $y = 0$ hasta $y = \frac{4}{3}$. Por tanto el área $A$ está dado por:

$$A = \int_0^{\frac{4}{3}} \int_{\frac{y}{2}}^{2-y} dxdy = \int_0^{\frac{4}{3}} x|_{\frac{y}{2}}^{2-y} \, dy = \int_0^{\frac{4}{3}} \left(2 - \frac{3}{2}y\right) dy = 2y - \frac{3}{4}y^2\Big|_0^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$$

22. Calcular el área de la región limitada por $y = x^2$ y $y = 2x + 3$.
Solución. Como la región está limitada inferiormente por la parábola $y = x^2$ y superiormente por la recta $y = 2x + 3$; entonces primero integramos con respecto de $y$ entre estos límites.
Con respecto de $x$ integramos en la proyección sobre el eje $x$ que va desde $x = -1$ hasta $x = 3$. Por tanto el área es

$$A = \int_{-1}^{3} \int_{x^2}^{2x+3} dydx = \int_{-1}^{3} y|_{x^2}^{2x+3} \, dx = \int_{-1}^{3} \left(2x + 3 - x^2\right) dx = x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$$

23. Calcular el área de la región limitada por $x = 6y - y^2$ y $y = x$.




Solución. La región está limitada por la izquierda por la recta $x = y$ y por la derecha por la parábola $x = 6y - y^2$; entonces primero integramos con respecto de $x$ entre estos límites. Con respecto de $y$ integramos en la proyección sobre el eje $y$ que va desde $y = 0$ hasta $y = 5$. Por tanto, el área pedida es

$$A = \int_0^5 \int_y^{6y-y^2} dxdy = \int_0^5 x|_y^{6y-y^2} dy = \int_0^5 \left(5y - y^2\right) dy = \left.\frac{5y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right|_0^5 = \frac{125}{6}$$

24. Hallar el área limitada por $y^2 = 4 - x$ y $y^2 = 4 - 4x$.
Solución. Como la región es simétrica, calculemos el área de la parte que está en el primer cuadrante y lo multiplicamos por 2. Esta porción está limitada por la izquierda por la parábola $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ (que se obtiene de $y^2 = 4 - 4x$) y por la derecha por $x = 4 - y^2$ (obtenida de $y^2 = 4 - x$); entonces integramos primero con respecto de $x$ entre estos límites. Con respecto de $y$, integramos en la proyección sobre el eje $y$ que va desde $y = 0$ hasta $y = 2$. Por tanto, el área pedida es

$$A = 2\int_0^2 \int_{1-y^2/4}^{4-y^2} dxdy = 2\int_0^2 x|_{1-y^2/4}^{4-y^2} dy = 2\int_0^2 \left(3 - \frac{3}{4}y^2\right) dy = 2\left.\left(3y - \frac{y^3}{4}\right)\right|_0^2 = 8$$

25. Calcular el área limitada por $y = 2x - x^2$ y $y = 3x^2 - 6x$.

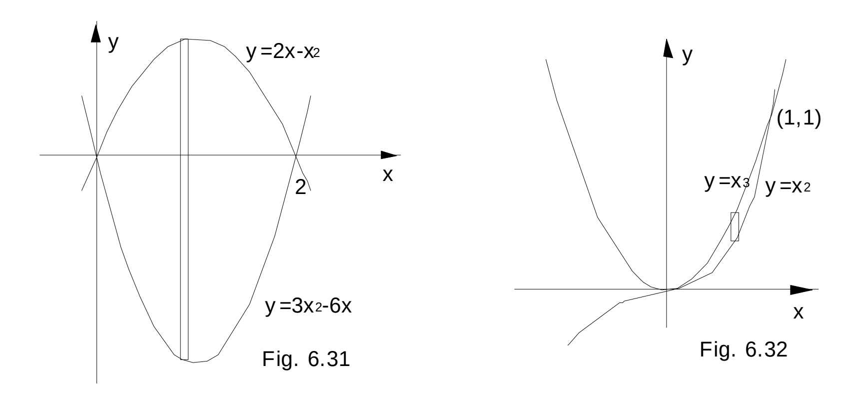


Fig. 6.31 Fig. 6.32

Solución. La región está limitada inferiormente por la parábola $y = 3x^2 - 6x$ y superiormente por la parábola $y = 2x - x^2$, entonces integramos primeramente con respecto de $y$ entre estos límites. Con respecto de $x$ integramos en la proyección sobre el eje $x$ que va desde $x = 0$ hasta $x = 2$. Por tanto, el área pedida es

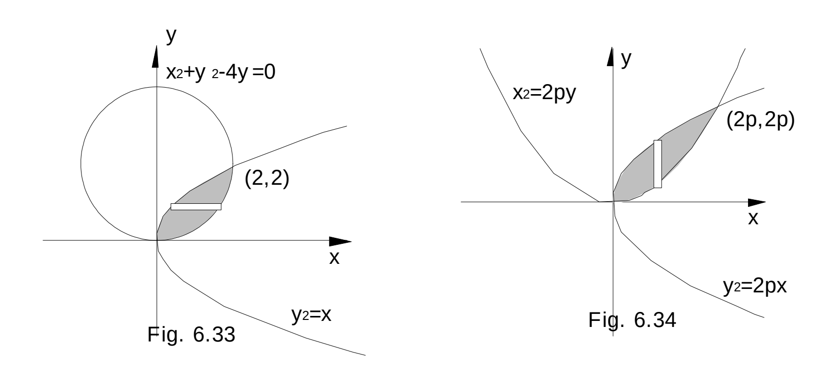
$$A = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dydx = \int_0^2 y|_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dx = \int_0^2 \left(8x - 4x^2\right) dx = 4x^2 - \frac{4x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{16}{3}$$

26. Hallar el área de la región limitada por $y = x^2$ y $y = x^3$.
Solución. Como la región está limitada inferiormente por la cúbica $y = x^3$ y superiormente por la parábola $y = x^2$; entonces integramos primero con respecto de $y$ entre estos límites. Con respecto de $x$, integramos en la proyección sobre el eje $x$ que va desde $x = 0$ hasta $x = 1$. Por tanto, el área pedida es:

$$A = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} dydx = \int_0^1 y|_{x^3}^{x^2} dx = \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

27. Calcular el área de la región en el primer cuadrante limitada por $y^2 = 2x$,

$x^2 + y^2 - 4y = 0$.




Solución. Como la región está limitada por la izquierda por la parábola $x = \frac{y^2}{2}$ (obtenida de $y^2 = 2x$) y por la derecha por el arco de circunferencia $x = \sqrt{4y - y^2}$ (obtenida de $x^2 + y^2 - 4y = 0$) entonces integramos primero con respecto de $x$ entre estos límites. Con respecto de $y$ integramos en la proyección sobre el eje $y$ que va desde $y = 0$ hasta $y = 2$. Por tanto, el área pedida es

$$A = \int_0^2 \int_{y^2/2}^{\sqrt{4y-y^2}} dxdy = \int_0^2 x|_{y^2/2}^{\sqrt{4y-y^2}} dy = \int_0^2 \left( \sqrt{4y - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy$$

$$= \frac{1}{2}(y-2)\sqrt{4y-y^2} + \frac{1}{2} 4 \arcsin\left(\frac{y-2}{2}\right) - \frac{y^3}{6}\Big|_0^2 = \pi - \frac{4}{3}$$

28. Calcular el área de la región limitada por $y^2 = 2px$ y $x^2 = 2py$.
Solución. Como la región está limitada inferiormente por la parábola $y = x^2/2p$ (obtenida de $x^2 = 2py$) y superiormente por la parábola $y = \sqrt{2px}$ (obtenida de $y^2 = 2px$); entonces integramos primero con respecto de $y$ entre estos límites. Con respecto de $x$ integramos en la proyección sobre el eje $x$ que va desde $x = 0$ hasta $x = 2p$. Por tanto, el área pedida es

$$A = \int_0^{2p} \int_{x^2/2p}^{\sqrt{2px}} dydx = \int_0^{2p} y|_{x^2/2p}^{\sqrt{2px}} dx = \int_0^{2p} \left( \sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \sqrt{2p}\frac{x^{3/2}}{3} \cdot 2 - \frac{x^3}{6p}\Big|_0^{2p} = \frac{4}{3}p^2$$

29. Hallar el área de la región limitada por $y = x^3 - 2x$ y $y = 6x - x^3$.

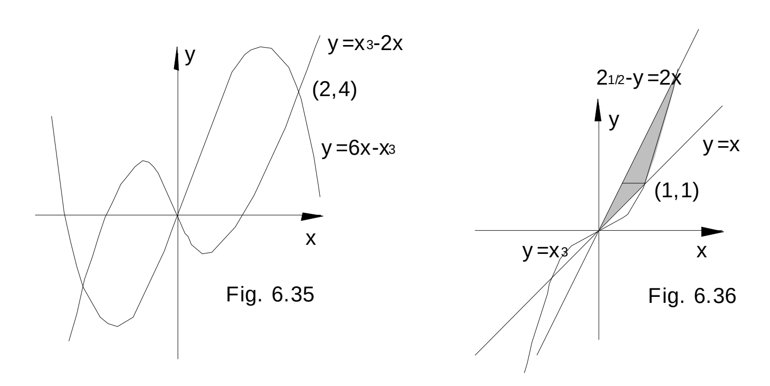



Fig. 6.35 Fig. 6.36

Solución. Debido a la simetría de la región, consideremos solamente la parte que está a la derecha del eje $y$, luego multiplicaremos ese área por dos. Como la región está limitada inferiormente por la cúbica $y = x^3 - 2x$ y superiormente por $y = 6x - x^3$, entonces integramos primero con respecto de $y$ entre estos límites. Con respecto de $x$ integramos en la proyección sobre el eje $x$ que va desde $x = 0$ hasta $x = 2$. Por tanto, el área pedida es

$$A = 2\int_0^2 \int_{x^3-2x}^{6x-x^3} dydx = 2\int_0^2 y|_{x^3-2x}^{6x-x^3} dx = 2\int_0^2 \left(8x - 2x^3\right) dx = 2\left(4x^2 - \frac{2x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 16$$

30. Hallar el área de la región limitada por $y = x^3$, $y = 2x$ y $y = x$.
Solución. Debido a la simetría de la región consideremos solamente la parte que está en el primer cuadrante y luego multiplicaremos su área por dos. Por una parte, la región está limitada por la izquierda por la recta $x = y/2$ (obtenida de $y = 2x$) y por la derecha por $x = y$ (entonces integramos primero con respecto de $x$ entre estos límites) cuando $y$ varía desde $y = 0$ hasta $y = 1$ (entonces integraremos con respecto de $y$ entre estos límites). Por otra parte, la región está limitada por la izquierda por la recta $x = y/2$ y por la derecha por la cúbica $x = y^{1/3}$ (entonces integraremos primero con respecto de $x$ entre estos límites) cuando y varía desde $y = 1$ hasta $y = 2\sqrt{2}$ (entonces integraremos respecto de $y$ entre estos límites). Por tanto, el área pedida es:

$$A = 2\left\{\int_0^1 \int_{y/2}^{y} dxdy + \int_1^{2\sqrt{2}} \int_{y/2}^{y^{1/3}} dxdy\right\} = 2\left\{\int_0^1 x|_{y/2}^{y} dy + \int_{y/2}^{2\sqrt{2}} x|_{y/2}^{y^{1/3}} dy\right\}$$

$$= 2\left\{\int_0^1 \frac{y}{2}dy + \int_1^{2\sqrt{2}} \left(y^{1/3} - \frac{y}{2}\right) dy\right\} = 2\left\{\frac{y^2}{4}\Big|_0^1 + \left(\frac{y^{4/3}}{4}\cdot 3 - \frac{y^2}{4}\right)\Big|_1^{2\sqrt{2}}\right\} = \frac{3}{2}$$

En los ejercicios 31 - 35 se calculan áreas de regiones planas efectuadas cambios de variables de modo que simplifiquen los cálculos.

31. Hallar el área de la región limitada por $x + y = 1$, $x + y = 2$, $y = 2x$ y $y = 2x + 2$.

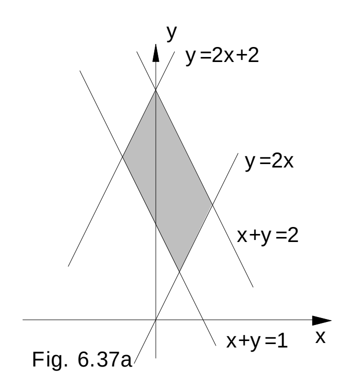


Fig. 6.37a

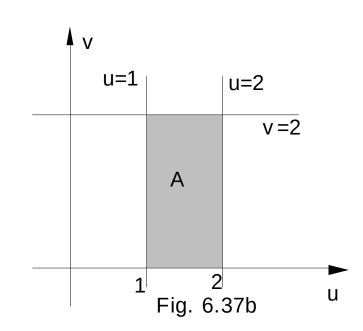


Fig. 6.37b

Solución. No conviene integrar sobre la región del plano $xy$ (Fig. ###) porque tendríamos que dividir la región en cuatro partes. Efectuando el cambio de variable $x + y = u$, $y - 2x = v$; vemos que $x + y = 1$, se transforma en $u = 1$, $x + y = 2$, se transforma en $u = 2$, $y - 2x = 0$, se transforma en $v = 0$ y $y - 2x = 0$, se transforma en $v = 2$. La región $A$ se transforma en la región $\overline{A}$ de la Fig. ###. Como

$$\frac{\partial\,(u,v)}{\partial\,(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

entonces el jacobiano de la transformación es:

$$\frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{3}$$

Integrando en la región del plano $uv$ (Fig. ###), teniendo en cuenta el jacobiano de la transformación, obtenemos el área pedida:

$$A = \iint_A dxdy = \iint_A \frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(u,v)} dudv = \int_0^2 \int_1^2 \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3} \int_0^2 u|_1^2\, dv = \frac{1}{3} \int_0^2 dv = \frac{1}{3}\, v|_0^2 = \frac{2}{3}$$

32. Hallar el área de la región anular limitada por $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$.

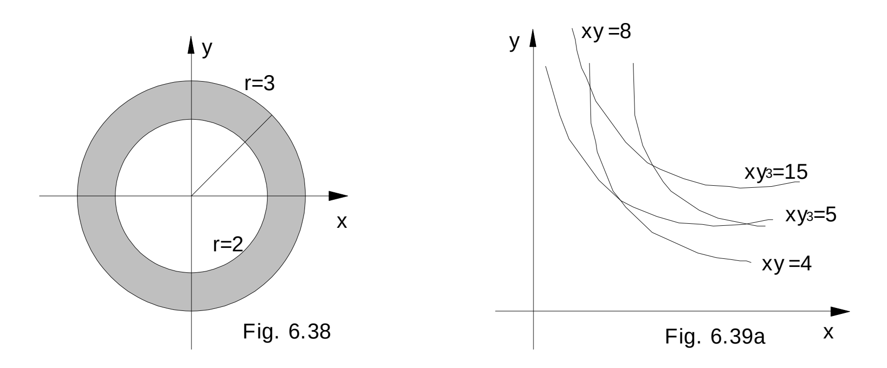



Fig. 6.38 Fig. 6.39a

Solución. Conviene pasar a coordenadas polares por medio de $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$; entonces $x^2 + y^2 = 4$, se transforma en $r = 2$, $x^2 + y^2 = 9$ se transforma en $r = 3$. El jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r,$$

como la circunferencia que limita la región anular, más cercana al origen, es $r = 2$ y la circunferencia más alejada es $r = 3$; entonces integramos con respecto de $r$ entre estos límites. Para cubrir toda la región anular, el ángulo $\theta$ varía desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$. Integrando entre estos límites y considerando el jacobiano de la transformación obtenemos el área pedida:

$$A = \int_0^{2\pi}\int_2^3 r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left.\frac{r^2}{2}\right|_2^3 d\theta = \frac{5}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \left.\frac{5}{2}\theta\right|_0^{2\theta} = 5\pi$$

33. Hallar el área de la región del primer cuadrante limitada por $xy = 4$, $xy = 8$, $xy^3 = 5$, $xy^3 = 15$.
Solución. La forma de las ecuaciones dadas sugiere hacer el cambio de variable $u = xy$, $v = xy^3$; entonces

| | | |
|---|---|---|
| $xy = 4$ | se transforma en | $u = 4$ |
| $xy = 8$ | se transforma en | $u = 8$ |
| $xy^3 = 5$ | se transforma en | $v = 5$ |
| $xy^3 = 15$ | se transforma en | $v = 15$ |

La región $A$ se transforma en $\overline{A}$ (Fig. ### y ##). Como

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ y^3 & 3xy^2 \end{vmatrix} = 2xy^3 = 2v,$$

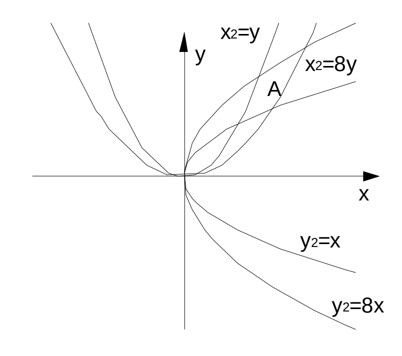
entonce el jacobiano de la transformación es

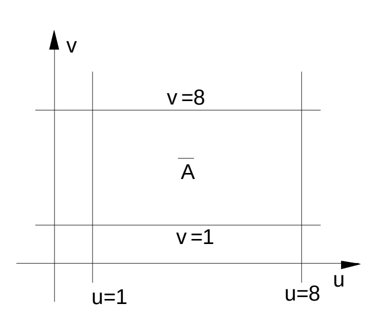
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{2v}.$$

Integrando en la región $\overline{A}$ (Fig. ###) y teniendo en cuenta el jacobiano de la transformación, obtenemos el área pedida:

$$\begin{aligned} A &= \int_5^{15}\int_4^{8} \frac{1}{2v}dudv = \frac{1}{2}\int_5^{15} \frac{u}{v}\Big|_4^8 dv = 2\int_5^{15}\frac{1}{v}dv = 2\ln v|_5^{15} = 2(\ln 5 - \ln 15) \\ &= 2\ln 3 \end{aligned}$$

34. Cacular el área de la región limitada por $y^2 = x$, $y^2 = 8x$, $x^2 = y$, $x^2 = 8y$.




Solución. La forma de las ecuaciones dadas sugiere efectuar el cambio de variable $u = \dfrac{y^2}{x}$ y $v = \dfrac{x^2}{y}$; entonces

$$\begin{array}{lll} y^2 = x & \text{se transforma en} & u = 1 \\ y^2 = 8x & \text{se transforma en} & u = 8 \\ x^2 = y & \text{se transforma en} & v = 1 \\ x^2 = 8y & \text{se transforma en} & v = 8 \end{array}$$

La región $A$ se transforma en la región $\overline{A}$ (Fig. ### y ##). Como

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \\ \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -3;$$

entonces el jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{3}$$

Integrando sobre $\overline{A}$ y teniendo en cuenta que el jacobiano de la transformación es $-\dfrac{1}{3}$, obtenemos el área pedida

$$A = \iint_{A} \left| \frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)} \right| dudv = \int_1^8 \int_1^8 \frac{1}{3} dudv = \frac{49}{3}$$

35. Hallar el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

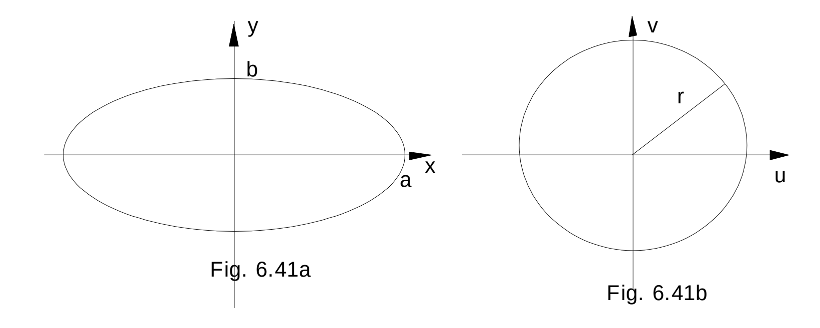



Fig. 6.41a

Fig. 6.41b

Solución. Efectuemos el cambio de variable $\dfrac{x}{a} = u$, $\dfrac{y}{b} = v$; entonces $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ se transforma en la circunferencia $u^2 + v^2 = 1$. El jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab \quad (1)$$

Ahora, pasemos a coordenadas polares; por el ejercicio 32 el jacobiano es

$$\frac{\partial (u,v)}{\partial (r,\theta)} = r \quad (2)$$

Además $u^2 + v^2 = 1$ se transforma en $r = 1$.
Teniendo en cuenta la simetría del círculo calculamos el área de la porción del primer cuadrante y lo multiplicamos por 4. Integrando y teniendo en cuenta los jacobiano (1) y (2) de las dos transformaciones obtenemos el área pedida:

$$A = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 abr\, drd\theta = 4ab \int_0^{\pi/2} \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^1 d\theta = 2ab \int_0^{\pi/2} d\theta = 2ab\; \theta|_0^{\pi/2} = \pi ab$$

**Nota**. Los dos cambios de variable se pueden efectuar de una sola vez haciendo $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$.

**MASA, DENSIDAD MEDA, CENTRO DE GRAVEDAD, CENTROIDE Y MOMENTOS**

36. Si $A$ es la región limitada por $3x + 4y = 24$, $x = 0$, $y = 0$ y la densidad es $\delta(x, y) = xy$, hallar a) la masa, b) la densidad media, c) el centro de gravedad, d) los momentos con respecto a los ejes $x$ e $y$ e) los segundos momentos con respecto a los ejes $x$ e $y$, f) el momento polar de inercia respecto del origen.

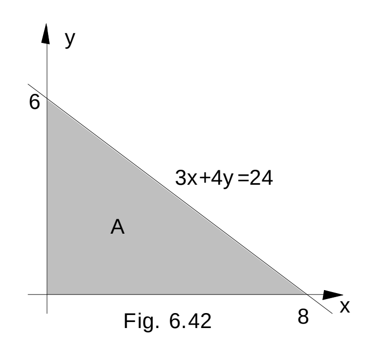


Fig. 6.42

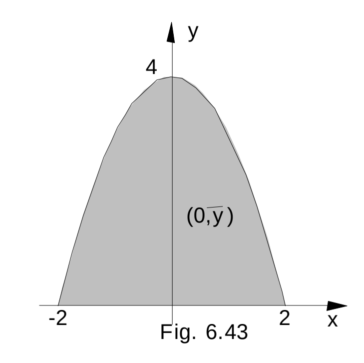


Fig. 6.43

Solución. a) La masa de $A$ es

$$m = \iint_A \delta(x, y)\, dxdy = \int_0^6 \int_0^{8-\frac{4}{3}y} xydxdy = \int_0^6 \frac{1}{2}\left(8 - \frac{4}{3}y\right) y\, dy = 96$$

b) Como el área de $A$ es $8 \cdot \dfrac{6}{2} = 24$; de la parte a) tenemos que la densidad media es

$$\overline{\delta} = \frac{\text{masa}}{\text{área}} = \frac{96}{24} = 4$$

c) Como

$$\iint_A x\delta(x, y)\, dxdy = \int_0^6 \int_0^{8-\frac{4}{3}y} x^2 y\, dxdy = \frac{1}{3}\int_0^6 \left(8 - \frac{4}{3}y\right)^3 y\, dy = \frac{1536}{5}$$

$$\iint_A y\delta(x, y)\, dxdy = \int_0^6 \int_0^{8-\frac{4}{3}y} xy^2\, dxdy = \frac{1}{2}\int_0^6 \left(8 - \frac{4}{3}y\right)^2 y^2 dy = \frac{1152}{5}$$

Entonces las coordenadas del centro de gravedad son:

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint_A x\delta(x, y)\, dxdy}{\displaystyle\iint_A \delta(x, y)\, dxdy} = \frac{\frac{1536}{5}}{96} = \frac{16}{5}\ ;\ \overline{y} = \frac{\displaystyle\iint_A y\delta(x, y)\, dxdy}{\displaystyle\iint_A \delta(x, y)\, dxdy} = \frac{\frac{1152}{3}}{96} = \frac{12}{5}$$

d) De la parte c) tenemos:

$$\text{momento respecto al eje } x = \iint_A y\delta(x,y)\,dxdy = \frac{1152}{5}$$
$$\text{momento respecto al eje } y = \iint_A x\delta(x,y)\,dxdy = \frac{1536}{5}$$

e) Los segundos momentos son

$$I_x = \iint_A y^2\delta(x,y)\,dxdy = \int_0^6 \int_0^{8-\frac{4}{3}y} xy^3 dxdy = \frac{1}{2}\int_0^6 \left(8-\frac{4}{3}y\right)^2 y^3 dy = \frac{3456}{5}$$

$$I_y = \iint_A x^2\delta(x,y)\,dxdy = \int_0^6 \int_0^{8-\frac{4}{3}y} x^3 y dxdy = \frac{1}{4}\int_0^6 \left(8-\frac{4}{3}y\right)^4 y dy = \frac{6144}{5}$$

f) El momento polar de inercia con respecto al origen es:

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{3456}{5} + \frac{6144}{5} = 1920$$

37. Hallar el centroide de la región limitada por $y = 4 - x^2$, $y = 0$.
Solución. Claramente el eje $y$ es un eje de simetría de la región, y por tanto, el centroide debe estar en dicho eje de simetría. Entonces $\overline{x} = 0$. Por otra parte, como

$$\iint_A ydxdy = \int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2} ydydx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^2 dx = \frac{256}{15}$$
$$\iint_A dxdy = \int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2} dydx = \int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right) dx = \frac{32}{3}$$

entonces

$$\overline{y} = \frac{\iint_A y\delta(x,y)\,dxdy}{\iint_A \delta(x,y)\,dxdy} = \frac{\frac{256}{15}}{\frac{32}{3}} = \frac{8}{5}$$

entonces

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(0, \frac{8}{5}\right) \text{ centroide}$$

38. Hallar el centroide de la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta

$y = x$.

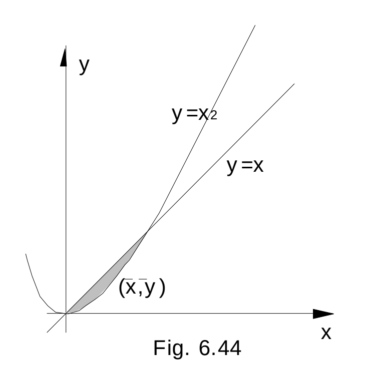


Fig. 6.44

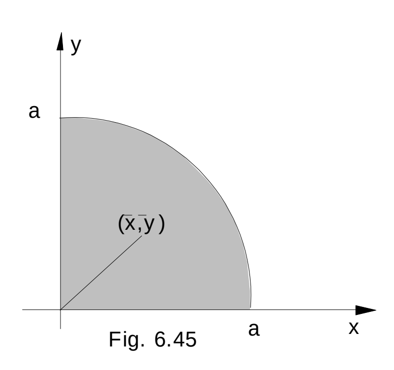


Fig. 6.45

Solución. Como la región no tiene eje de simetría, debemos calcular ambas coordenadas del centroide. Como

$$\iint_A ydxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^x ydydx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) dx = \frac{1}{15}$$

$$\iint_A xdxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^x xdydx = \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) dx = \frac{1}{12}$$

$$\iint_A dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^x dydx = \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx = \frac{1}{6}$$

Entonces,

$$\overline{x} = \frac{\iint_A ydxdy}{\iint_A dxdy} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{5}\ ;\ \overline{y} = \frac{\iint_A xdxdy}{\iint_A dxdy} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$

39. Hallar el centro geométrico de la región limitada por $x^2 + y^2 = a^2$, $x = 0$, $y = 0$.
Solucion. Claramente la recta $y = x$ es un eje de simetría que divide la región exactamente en dos partes iguales y por tanto, al estar el centroide en este eje de simetría, se tiene $\overline{x} = \overline{y}$. Entonces es suficiente calcular una sola de las coordenadas del centroide. Como:

$$\iint_A ydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^2 \sin\theta drd\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = \frac{a^3}{3} \text{ (pasando a polares)}$$

$$\iint_A dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a rdrd\theta = \left.\frac{a^2}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

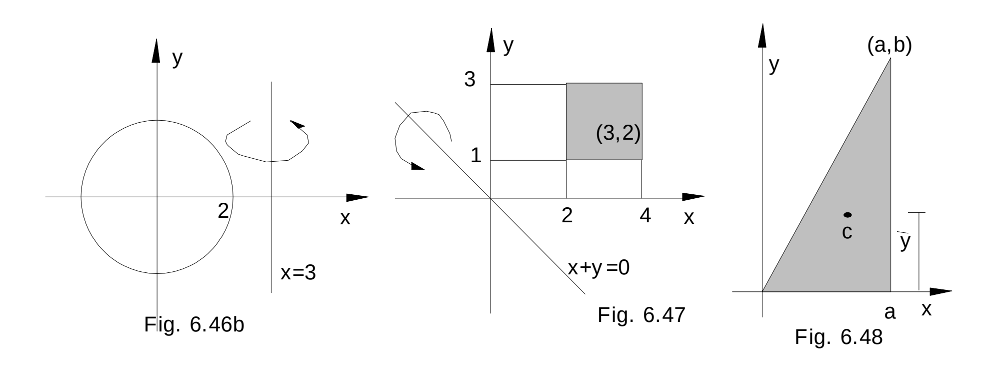
cuarta parte del área de una circunferencia de radio $a$. Entonces

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint_A y\,dxdy}{\displaystyle\iint_A dxdy} = \frac{\frac{a^3}{3}}{\frac{\pi a^2}{4}} = \frac{4a}{3\pi}$$

Luego, $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}\right)$ son las coordenadas del centroide.

**TEOREMA DE PAPPUS**

40. Hallar el volumen del toro generado por la rotación del disco limitado por $x^2 + y^2 = 4$ alrededor de la recta $x = 3$.




Solución. Debido a la simetría del disco (Fig. ###) su centroide está en el origen $(0, 0)$. El área del disco es

$$A = \pi 2^2 = 4\pi.$$

Si este disco gira alrededor de la recta $x = 3$, su centroide desribe una circunferencia de radio 3, y por tanto;

$$V = 2\pi \cdot 3 \cdot 4\pi = 24\pi^2.$$

41. Calcular el volumen del sólido general al girar el cuadrado de la Fig. ### alrededor de a) el eje $x$, b) del eje $y$, c) de la recta $x + y = 0$.
Solución. Por simetría, el cuadrado tiene su centroide es $(\overline{x}, \overline{y}) = (3, 2)$. El área del cuadrado (de lado 2) es $A = 4$.
a) Al girar alrededor del eje $x$, el centroide describe una circunferencia de radio $\overline{y} = 2$. Por tanto,

$$V = 2\pi\overline{y}A = 2\pi \cdot 2 \cdot 4 = 16\pi$$

b) Al girar alrededor del eje $\overline{y}$, el centroide describe una circunferencia de radio $\overline{x} = 3$. Por tanto,

$$V = 2\pi\overline{x}A = 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = 24\pi$$

c) Como la distancia del centroide $(3,2)$ a la recta $x+y=0$ es $r = \dfrac{(3+2)}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$, al girar alrededor de dicha recta el centroide describe una circunferencia de radio $r = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$. Por tanto,

$$V = 2\pi \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot 4 = 20\pi\sqrt{2} \text{ unidades de volumen}$$

42. Mostrar que el centroide de un triángulo rectángulo dista de su base a un tercio de su altura.
Solución. Vamos a usar el teorema de Pappus. Consideremos un triángulo de base $a$ y altura $b$ como el de la Fig. ###. El área de este triángulo es

$$A = \frac{ab}{2}$$

y al girar alrededor de su base (sobre el eje $x$) genera un cono de volumen

$$V = \frac{1}{3}\pi ab^2.$$

El centroide $c = (\overline{x}, \overline{y})$, describe una circunferencia de radio $\overline{y}$; por tanto

$$V = 2\pi\overline{y}A \Rightarrow \frac{1}{3}\pi ab^2 = 2\pi\overline{y}\frac{ab}{2}$$

entonces

$$y = \frac{b}{3}$$

lo que dice que el centroide del triángulo dista de la base a un tercio de su altura.

**PROBLEMAS VARIOS DE INTEGRALES DOBLES**

43. Calcular $\displaystyle\iint_A \sqrt{4-x^2-y^2}\,dA$ donde $A$ es la región limitada por $x^2+y^2 = 1$.

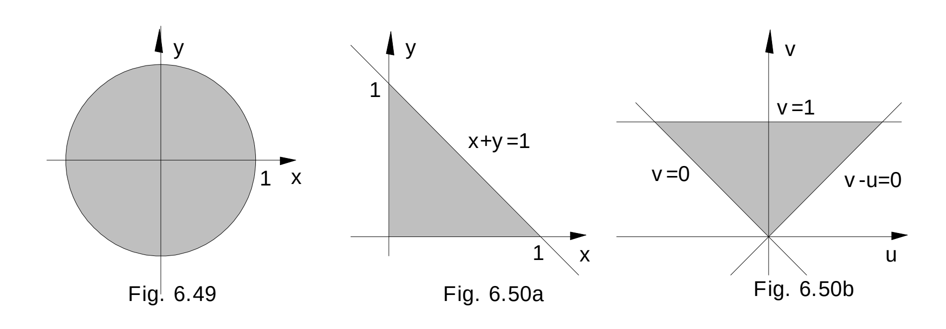



Fig. 6.49 Fig. 6.50a Fig. 6.50b

Solución. Conviene pasar a coordenadas polares. Entonces $x^2+y^2=r^2$, y la circunferencia $x^2+y^2=1$ se escribe como $r=1$. Teniendo en cuenta que el jacobiano de la transformación es $r$ e integrando en la circunferencia $r=1$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\iint_A \sqrt{4-x^2-y^2}\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \sqrt{4-r^2}\; r\; dr d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left.\frac{\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\cdot 2\right|_0^1 d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}-8\right)\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{3}\left(2-3\sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

44. Calcular $\iint_A e^{\frac{x-y}{x+y}}dA$, donde $A$ es la región limitada por $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.
Solución. La forma del integrando sugiere hacer el cambio de variables $u=x-y$, $v=x+y$; entonces

$$\begin{array}{rlr}
x+y=1 & \text{se transforma en} & v=1 \\
x=0 & \text{se transforma en} & u+v=0 \\
y=0 & \text{se transforma en} & v-u=0
\end{array}$$

La región $A$ se transforma en la región $\overline{A}$ (Fig. ### y ##).

$$\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

El jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)} = \frac{1}{\dfrac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)}} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Efectuando los reemplazos correspondientes, teniendo en cuenta el jacobiano (1) e integrando en $\overline{A}$ (Fig. ###), obtenemos:

$$\iint_A e^{\frac{x-y}{x+y}}dA = \int_0^1\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\frac{1}{2}dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 \left. ve^{\frac{u}{v}}\right|_{-v}^{v} dv = \frac{e-e^{-1}}{2}\int_0^1 vdv = \left.\frac{\left(e-e^{-1}\right)}{4}v^2\right|_0^1 = (e -$$

**Nota**. Efectuando el cambio de variable (menos natural, por cierto)

$$x=u-uv \quad , \quad y=uv$$

tanto el integrando como la nueva región de integración resultan ser más simples todavía.

45. Si la región $A$ está limitada por $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, mostrar que

$$\iint_A \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy = \frac{\sin 1}{2}$$

Solución. La forma del integrando sugiere hacer el cambio de variable $u=x-y$, $v=x+y$. Por el ejercicio 43 la región $A$ de la Fig. ### se transforma en la región de la Fig. ### y el jacobiano de la transformación es $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{2}$. Reemplazando, teniendo en cuenta el jacobiano e integrando en la región $\overline{A}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_A \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy &= \iint_{\overline{A}} \cos\left(\frac{u}{v}\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \int_0^1\int_{-v}^{v} \cos\left(\frac{u}{v}\right)\frac{1}{2}dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 v\sin\left(\frac{u}{v}\right)\Big|_{-v}^{v} dv = \frac{1}{2}\int_0^1 2\sin 1 v dv = \sin 1 \left.\frac{v^2}{2}\right|_0^1 = \frac{\sin 1}{2} \end{aligned}$$

46. Mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Solución. Consideremos

$$I = \int_{-T}^{T} e^{-x^2} dx \ (1)$$

donde $T>0$ es arbitrario pero fijo,

$$I = \int_{-T}^{T} e^{-y^2} dy \ (2)$$

se puede usar cualquier variable de integración. Multiplicando miembro a miembro (1) y (2) tenemos

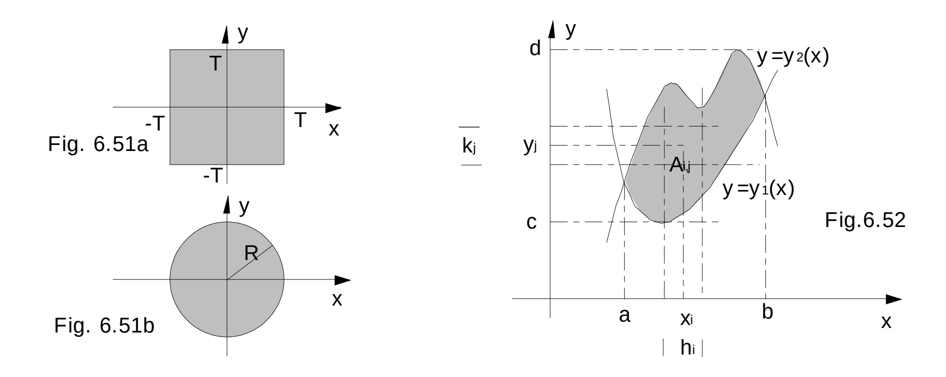
$$I^2 = \left(\int_{-T}^{T} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-T}^{T} e^{-y^2} dy\right) = \int_{-T}^{T}\left(\int_{-T}^{T} e^{-x^2}e^{-y^2} dx\right) dy$$

por ser $x$, $y$ variables independientes entre sí

$$I^2 = \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dA \quad (3)$$

Notemos que la integral $I^2$ dada en (3) se integra en un cuadrado de lado

$2T$ como el de la Fig. ###.




Tomando el límite en (3) cuando el lado del cuadrado es cada vez más grande tenemos

$$\lim_{T\to\infty} I^2 = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dA = \iint_A e^{-\left(x^2+y^2\right)} dA \quad (4)$$

donde $A$ es todo el plano $xy$ pronto al crecer $T$ el cuadrado llega a cubrir todo el plano. Pasando (4) a coordenadas polares y teniendo en cuenta que cuando el radio $R$ de un círculo (como el de la Fig. ###) se hace cada vez más grande llega a cubrir todo el plano, entonces de (4) tenemos

$$\lim_{T\to\infty} I^2 = \lim_{T\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^{R} e^{-r^2} r dr d\theta = \lim_{R\to\infty} 2\pi \frac{1-e^{-R^2}}{2} = \pi \quad (5)$$

como:

$$\lim_{T\to\infty} I^2 = \left(\lim_{T\to\infty} I\right)^2 = \left(\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} e^{-x^2} dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 \quad (6)$$

De (5) y (6) y tomando raíces cuadradas obtenemos:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \pi \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

47. Mostrar el Teorema Fundamental de las integrales dobles de la página ##.
Solución. Consideremos la región $A$ de la Fig. ### limitadas inferiormente por la curva $y = y_1(x)$ y superiormente por $y = y_2(x)$. Dividamos los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ (proyecciones de $A$ sobre los ejes $x$ y $y$, respectivamente) en $n$ y $m$ partes de longitudes $h_1$, $h_2$, ..., $h_n$ y $k_1$, $k_2$, ..., $k_m$, respectivamente.

De cada una de dichas partes elijamos arbitrariamente los números $x_i$, $x_j$ de tal manera que el punto $(x_i, y_j)$ se encuentre en el rectángulo de lados $h_i$ y $k_i$ y de área $A_{ij}$. Ahora formemos la suma:

$$S_{n,m} = \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{\substack{j=m\\i=n}} f(x_i, y_j) A_{i,j} = \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{\substack{j=m\\i=n}} f(x_i, y_j) h_i k_j \quad (1)$$

Por una parte:

$$\lim_{\substack{n \to \infty\\m \to \infty}} S_{n,m} = \iint_A f(x, y)\, dA \quad (2)$$

(donde el límite se toma, por supuestoo, cuando además $\max A_{i,j} \to 0$; es decir, $\max h_i \to 0$ y $\max k_j \to 0$).
Por otra parte: manteniendo $i$ fijo tomemos el límite en (1) cuando $m \to \infty$ y $\max k_j \to 0$; entones recordando la definición de una integral simple tenemos:

$$\lim_{m\to\infty} S_{n,m} = \lim_{m\to\infty} \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{\substack{j=m\\i=n}} f(x_i, y_j) h_i k_j = \sum_{i=1}^{i=n} \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x_i, y)\, dy \right) h_i \quad (3)$$

Ahora, tomando el límite en (3) cuando $n \to \infty$ y $\max h_i \to 0$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} S_{n,m} = \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x_i, y)\, dy \right) dx \quad (4)$$

Si $f$ es integrable en $A$, el límite (2) existe y, por tanto, es el mismo que el límite (4). Es decir

$$\iint_A f(x, y)\, dA = \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x_i, y)\, dy \right) dx = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x_i, y)\, dydx$$

Si la región $A$ es como en la Fig. ### se procede similarmente.
**Nota**. En parte o totalmente, algún rectángulo de lados $h_i$ y $k_j$ puede estar fuera de la región $A$. Este detalle se salva definiendo $f(x, y) = 0$ para los puntos $(x, y)$ de dichas partes fuera de $A$. Por otra parte, si las curvas que limitan $A$ no son como en la Fig. ### (ó ###) se puede dividir la región $A$ en subregiones $A_1$, $A_2$, ..., que sean de la forma deseada y la suma de las integrales sobre $A_1$, $A_2$ da la integral sobre $A$.

48. Justificar la Fórmula del Cambio de Variables para integrales dobles.
Solución. Supongamos que el cambio de variables está dado por $x = (u, v)$, $y = (u, v)$ que define una función $g$ del plano $uv$ al plano $xy$. Sea $(u, v)$

un punto del plano $uv$ cuya imagen en el plano $xy$ es $(x, y)$; consideremos un pequeño rectángulo de área $\overline{R}$ de dimensiones $\Delta u$ y $\Delta v$ con vértice en $(u, v)$ con el de la Fig. ###. En general, la imágen del rectángulo de área $\overline{R}$ del plano $uv$ es un paralelogramo curvilíneo del plano $xy$ de área $R$. Emplearemos la derivada de la transformación $g$ para calcular aproximadamente el área $R$. Como $\Delta u$ y $\Delta v$ son pequeños, de la definición de derivada tenemos:

$$g\begin{bmatrix} u+\Delta u \\ v \end{bmatrix} \simeq g\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix}\Delta u \quad (1)$$

$$g\begin{bmatrix} u \\ v+\Delta v \end{bmatrix} \simeq g\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\Delta v \quad (2)$$

Entonces, de (1) y (2) vemos que la imágen del rectángulo en el plano $uv$ es aproximadamente un paralelogramo en el plano $xy$ con vértice en $(x, y)$ y de lados

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right)\Delta u \ , \quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right)\Delta v$$

El área $R$ es aproximadamente igual al área de este paralelogramo; es decir:

$$\begin{aligned} R &\simeq \left|\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right)\Delta u \times \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right)\Delta v\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|\Delta u\Delta v = \\ &= \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|\Delta u\Delta v = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|\overline{R} \end{aligned}$$

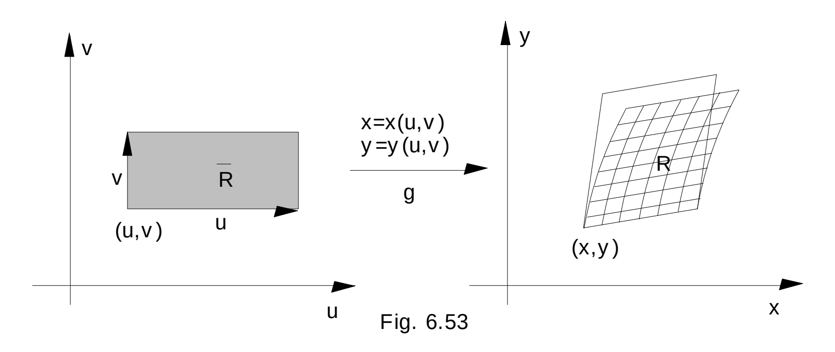


Fig. 6.53

Notemos que (3) dice que el jacobiano (es decir, su valor absoluto) es un "factor de proporcionalidad" de áreas. Ahora, si la imágen en la región $\overline{A}$ del plano $uv$ es la región $A$ del plano $xy$ por medio del cambio de variables; entonces una división de $A$ en $n$ partes de áreas $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ produce una división de $\overline{A}$ en $n$ partes de áreas $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_n$ respectivamente

(Fig.. ###). Por tanto, de la definición de la integral doble de $f(x,y)$ en la región considerando (3), obtenemos:

$$\begin{aligned}\iint_A f(x.y)\,dA &= \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1,y_1)A_1+...+f(x_n,y_n)\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1,y_1)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\overline{A}_1+...+f(x_n,y_n)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\overline{A}_n\right]\\ &= \iint_{\overline{A}} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|d\overline{A}\end{aligned}$$

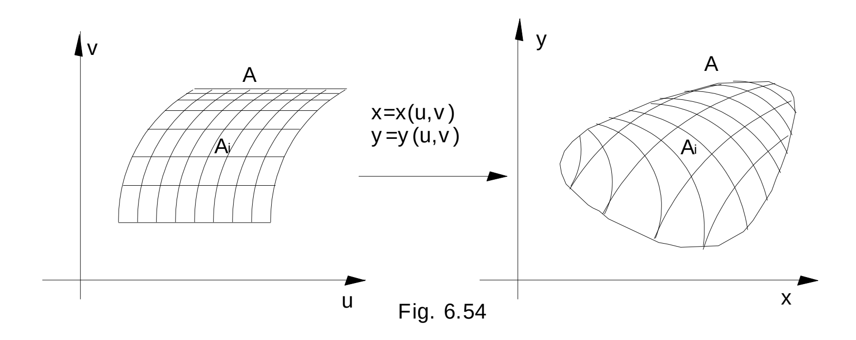


Fig. 6.54

**INTEGRALES TRIPLES**

49. Dividiendo en cuatro partes la región $V$ limitada por los planos $x=4$, $y=2$, $z=4$ y los planos coordenados, calcular aproximadamente el valor de la integral triple.

$$\iiint_V (x-y+z)\,dV$$

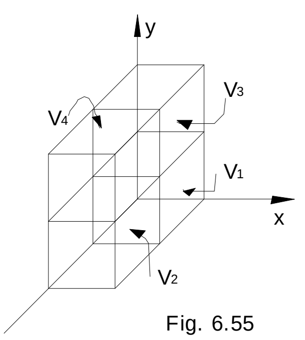


Fig. 6.55

Solución. Dividamos la región $V$ tal como se muestra en la Fig. ### y de cada pedazo elijamos un punto. Sean $P_1=(1,1,1)$, $P_2=(3,1,1)$, $P_3=(1,1,3)$ y $P_4=(3,1,3)$ los puntos tomados de los pedazos $V_1$, $V_2$, $V_3$

y $V_4$, respectivamente. Como el volumen de cada pedazo $V_i$ es 8, tenemos:

$$\begin{aligned}\iiint_V (x-y+z)\,dV &\simeq f(x_1,y_1,z_1)\,V_1+...+f(x_4,y_4,z_4)\,V_4\\ &= (1-1+1)\,8+(3-1+1)\,8+(1-1+3)\,8+(3-1+3)\,8=96\end{aligned}$$

**CALCULO DE INTEGRALES TRIPLES**

En los ejercicios 49 - 53 se calculan integrales tres veces iteradas.

50. $\int_0^1\int_1^2\int_2^3 dzdxdy = \int_0^1\int_1^2 z|_2^3\,dxdy = \int_0^1\int_1^2 (3-2)\,dxdy = \int_0^1 x|_1^2\,dy =$
$\int_0^1 (2-1)\,dx = 1$

51. $\int_0^1\int_0^{1-x}\int^{2-x} dzdydx = \int_0^1\int_0^{1-x} z|_0^{2-x}\,dydx = \int_0^1\int_0^{1-x} (2-x)\,dydx =$
$\int_0^1 (2-x)\,y|_0^{1-x}\,dx$
$= \int_0^1 (2-x)(1-x)\,dx = \int_0^1 \left(2-3x+x^2\right)dx = \frac{5}{6}.$

52. $\int_0^1\int_{x^2}^x\int_0^{xy} dzdydx = \int_0^1\int_{x^2}^x z|_0^{xy} = dydx = \int_0^1\int_{x^2}^x xydydx = \int_0^1 x\,\left.\frac{y^2}{2}\right|_{x^2}^x dx =$
$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^3-x^5\right)dx = \frac{1}{24}.$

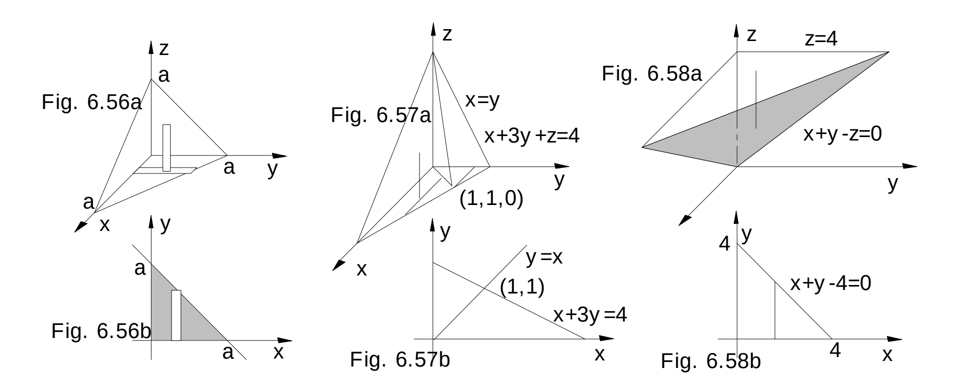
53. $\int_0^\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\cos\theta} \sin^2\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \int_0^\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho\sin^2\phi|_0^{\cos\phi}\,d\phi\,d\theta = \int_0^\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\phi\cos\phi d\phi d\theta =$
$= \int_0^\pi \left.\frac{\sin^3\phi}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{1}{3}\int_0^\pi \frac{\sqrt{2}}{4}d\theta = \frac{\sqrt{2}}{12}\,\theta|_0^\pi = \frac{\sqrt{2}}{12}\pi.$

54. $\int_0^1\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_0^{1-x} dzdydx = \int_0^1\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} z|_0^{1-x}\,dydx = \int_0^1\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (1-x)\,dydx =$
$= \int_0^1 (1-x)\,y|_0^{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = \int_0^1 (1-x)\sqrt{2x-x^2}dx = \frac{1}{3}\left.\left(2x-x^2\right)^{3/2}\right|_0^1 =$
$\frac{1}{3}.$

En slos ejercicios 54 - 71 se calculan volúmenes de regiones sólidas.

55. Calcular el volumen del tetraedro limitado por $x+y+z=a$ y los planos

coordenados.




Solución. Primeramente integramos con respecto de $z$ desde el plano que limita inferiormente $z = 0$, hasta el plano $z = a - x - y$ (ec. obtenida de $x + y + z = a$) que limita superiormente al tetraedro, Fig. ###.Con respecto de las otras variables integramos en la proyección sobre el plan $xy$:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = a \\ z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = a \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \quad \text{triángulo}$$

Como la proyección (Fig. ###) está limitada inferiormente por la recta $y = 0$ y superiormente por $y = a - x$ (ec. obtenida de $x + y = a$) integramos con respecto de $y$ entre estos límites. Con respecto de $x$ integramos en la proyección sobre el eje $x$ que va desde $x = 0$ hasta $x = a$. Por tanto, el volumen del tetraedro es:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a \int_0^{a-x} \int_0^{a-x-y} dzdydx = \int_0^a \int_0^{a-x} (z - x - y)\, dydx \\ &= \int_0^a (a - x)\, y - \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{a-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^a (a - x)^2\, dx = -\frac{1}{2 \cdot 3} \left.(a - x)^3\right|_0^a = \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

**Nota.** Ya sabemos que el volumen de un cubo de lado $a$ es $a^3$; este ejercicio establece que el volumen de un tetraedro de lado $a$ es la tercera parte que el del cubo.

56. Hallar el volumen del sólido limitado por los planos $x = y$, $x + 3y + z = 4$, $y = 0$, $z = 0$.
Solución. Primeramente integramos con respecto de $z$ desde el plano que limita inferiormente $z = 0$, hasta el plano $z = 4 - x - 3y$ (ec. obtenida de $x + 3y + z = 4$) que limita superiormente al sólido (Fig. ###). Con respecto de las otras variables integramos en la proyección sobre el plano

$xy$:

$$\begin{array}{l} x+3y+z=a \\ z=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x+3y=4 \\ x=y \\ y=0 \end{array} \quad \text{triángulo}$$

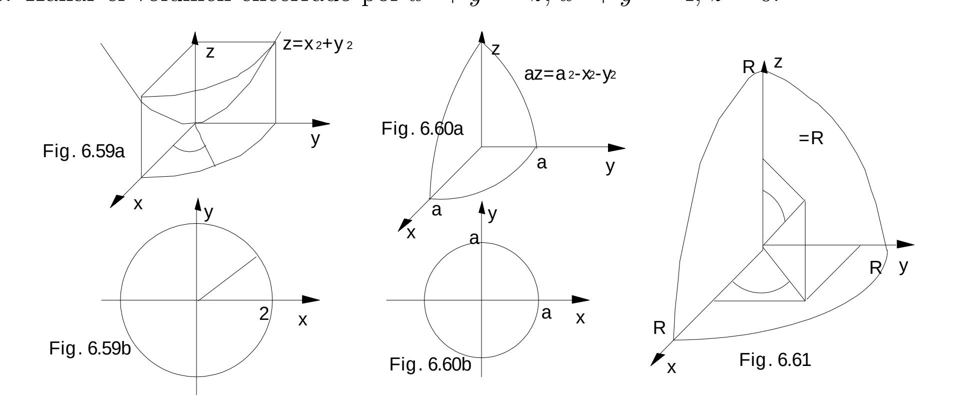
Como la proyección está limitada por la izquierda por la recta $x = y$ (Fig. ###) y por la derecha por la recta $x = 4-3y$ (ec. obtenida de $x+3y = 4$); entonces integramos con respecto de $x$ entre estos límites. Con respecto de $y$ integramos en la proyección sobre el eje $y$ que va desde $y = 0$ hasta $y = 1$. Por tanto, el volumen pedido es:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_y^{4-3y} \int_0^{4-x-3y} dzdxdy = \int_0^1 \int_y^{4-3y} (4-x-3y)\, dxdy \\ &= \int_0^1 (4-3y)\, x - \frac{x^2}{2}\bigg|_y^{4-3y} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (4-3y)^2\, dy \\ &= -\frac{1}{2\cdot 3\cdot 3}\,(4-3y)^3\Big|_0^1 = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

57. Hallar el volumen encerrado por $x+y-z = 0$, $z = 4$ y los planos cordenados $x = 0$.
Solución. Primeramente integramos con respecto de $z$ desde el plano que limita al sólido inferiormente $z = x + y$ (ec. obtenida de $x + y - z = 0$) hasta el plano $z = 4$ que lo limita superiormente.
Con respecto a las otras variables integramos en la proyección sobre el plano $xy$:
Como la proyección (Fig. ###) está limitada inferiormente por la recta $y = 0$ y superiormente por $y = 4 - x$ (ec. obtenida de $x + y - 4 = 0$); entonces integramos con respecto de $y$ entre estos límites. Con respecto de $x$ integramos en la proyección sobre el eje $x$ que va desde $x = 0$ hasta $x = 4$. Por tanto, el volumen pedido es:

$$V = \int_0^4 \int_0^{4-x} \int_{x+y}^{4} dzdydx = \int_0^4 \int_0^{4-x} (4-x-y)\, dydx = \int_0^4 (4-x)\, y - \frac{y^2}{2}\bigg|_0^4 = \frac{32}{3}$$

58. Hallar el volumen encerrado por $x^2 + y^2 = z$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.




Solución. Conviene pasar a coordenadas cilíndricas (ver pag. ##), $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$; entonces

$$\begin{array}{lll} z = x^2 + y^2 & \text{se transforma en} & z = r^2 \\ x^2 + y^2 = 4 & \text{se transforma en} & r = 2 \\ z = 0 & \text{se transforma en} & z = 0 \end{array}$$

El jacobiano de la transformación es:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r$$

Ahora, primeramente integramos con respecto de $z$ desde el plano que lo limita inferiormente $z = 0$ hasta el paraboloide $z = r^2$ que lo limita superiormente (Fig. ###).
Con respecto a las otras variables integramos sobre la proyección en el plano $xy$.

$$\begin{array}{l} z = r^2 \\ r = 2 \\ z = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} r = 0 & \text{origen del plano } xy \\ r = 2 & \text{circunferencia de radio 2} \end{array}$$

En la proyección (6.58b) integramos con respecto de $r$ desde el origen $r = 0$ hasta la circunferencia $r = 2$. Para cubrir todo el círculo el ángulo $\theta$ debe variar desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$.

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^2 d\theta = 4\int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi$$

59. Hallar el volumen encerrado por $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$.
Solución. Conviene pasar a coordenadas cilíndricas. Entonces: Primeramente integramos con respecto de $z$ desde el plano $z = 0$ hasta el paraboloide

$z = a - \dfrac{r^2}{a}$ (ecuación obtenida de (##)).
Con respecto a las otras variables integramos en la proyección sobre el plano $xy$:

$$\begin{array}{l} az = a^2 - r^2 \\ z = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = a^2 - r^2 \\ r = 2 \end{array} \quad \text{circunferencia}$$

Para cubrir el círculo de la proyección (6.59b) integramos con respecto de $r$ desde el origen $r = 0$ hasta la circunferencia $r = a$; y el ángulo $\theta$ varía desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$.
Por tanto, teniendo en cuenta el jacobiano de la transformación (ejercicio 57), el volumen pedido es:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{a-r^2/a} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left(ar - \frac{r^3}{a}\right)dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{ar^2}{2} - \frac{r^4}{4a}\right)\Bigg|_0^a d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{a^3}{4}d\theta = \frac{\pi}{2}a^3 \end{aligned}$$

60. Hallar el volumen encerrado por $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
Solución. Conviene pasar a coordenadas esféricas (ver página ##).

$$x = \rho\cos\theta\sin\phi \;\; ; \;\; y = \rho\sin\theta\sin\phi \;\; ; \;\; z = \rho\cos\phi$$

entonces

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \;\Rightarrow\; \rho = R$$

El jacobiano de la transformación es

$$\begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\phi$$

y su valor absoluto es: $\rho^2\sin\phi$ (notemos que $\phi$ debe tomarse entre $\phi = 0$ y $\phi = \pi$. para que $\sin\phi \geq 0$ y el valor absoluto del jacobiano sea no negativo).
Calcularemos el volumen de la porción que está en el primer octante y lo multiplicaremos por 8 para obtener el volumen de la esfera. Para cubrir dicho volumen (Fig. ###) $\rho$ varía desde $\rho = 0$ hasta $\rho = R$; el ángulo $\phi$ varía desde $\phi = 0$ hasta $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ y el $\theta$ varía desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Por tanto, teniendo en cuenta el jacobiano de la transformación, el volumen

de la esfera es

$$\begin{aligned} V &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3}\sin\phi\Big|_0^R \, d\phi \, d\theta = \frac{8R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{8R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos\phi\right)\big|_0^{\pi/2} \, d\theta = \frac{8R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{8R^3}{3}\; \theta\big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

61. Hallar el volumen encerrado entre las esferas $x^2+y^2+z^2 = 9$, $x^2+y^2+z^2 = 4$.

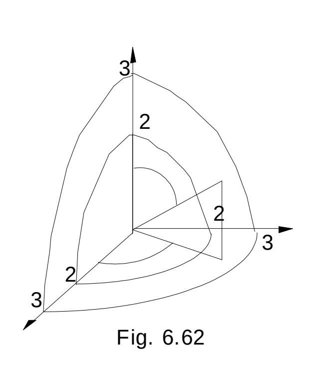


Fig. 6.62

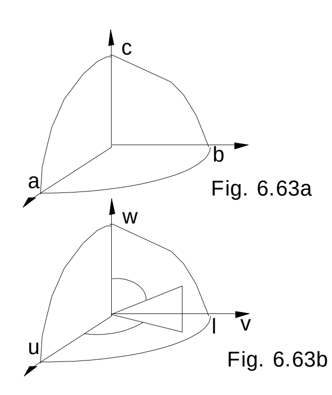


Fig. 6.63a

Fig. 6.63b

Solución. Conviene pasar a coordenadas esféricas. Entonces

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 = 9 \quad &\Rightarrow \quad \rho = 3 \\ x^2+y^2+z^2 = 9 \quad &\Rightarrow \quad \rho = 2 \end{aligned}$$

Por la simetría, vamos a calcular el volumen de la porción del primer octante y lo multiplicaremos por 8. Para cubrir dicho volumen $\rho$ varía desde la esfera $\rho = 2$ hasta la esfera $\rho = 3$, $\phi$ varía desde $\phi = 0$ hasta $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ y $\theta$ varía desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Por tanto, el volumen pedido es:

$$\begin{aligned} V &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^3 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3}\sin\phi\Big|_2^3 \, d\phi \, d\theta = \frac{8}{3}\left(27-8\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{152}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{76}{3}\pi \end{aligned}$$

**Nota**. Aplicando el ejercicio 59, el volumen pedido es la diferencia del volumen de la esfera de radio 3 menos el volumen de la esfera de radio 2:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(3\right)^3 - \frac{4}{3}\pi\left(2\right)^3 = \frac{76}{2}\pi$$

62. Hallar el volumen de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ($a>0$, $b>0$, $c>0$).

Solución. Previamente conviene efectuar el cambio $\frac{x}{a}=u$, $\frac{y}{b}=v$, $\frac{z}{c}=w$. El jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}=abc$$

Ahora conviene pasar a coordenadas esféricas, el jacobiano correspondiente es $\rho^2\sin\phi$. Entonces

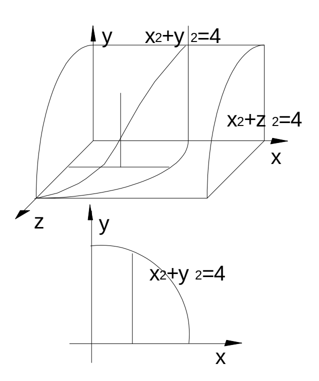
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad\Rightarrow\quad u^2+v^2+z^2=1 \quad\Rightarrow\quad \rho=1 \text{ (esfera)}$$

Por tanto, integrando sobre la porción del primer octante (Fig. ###) y considerando los jacobianos de las dos transformaciones, el volumen del elipsoide es

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 abc\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=V=8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\frac{4}{3}\pi abc$$

La última integral se obtiene el ejercicio 59 con $R=1$; o integrando simplemente.

63. Hallar el volumen limitado, por los cilindros $x^2+y^2=4$, $x^2+z^2=4$.




Solución. Por la simetría, vamos a calcular solamente el volumen de la porción del primer octante y lo multiplicaremos por 8 para obtener el volumen pedido. Aparentemente deberíamos pasar a coordenadas cilíndricas, sin embargo, en este caso es más conveniente calcular con las coordenadas cartesianas dadas. Primero integramos con respecto de $z$ desde el plano $z=0$ hasta el cilindro $z=\sqrt{4-x^2}$ (ec. obtenida de $x^2+z^2=4$). De

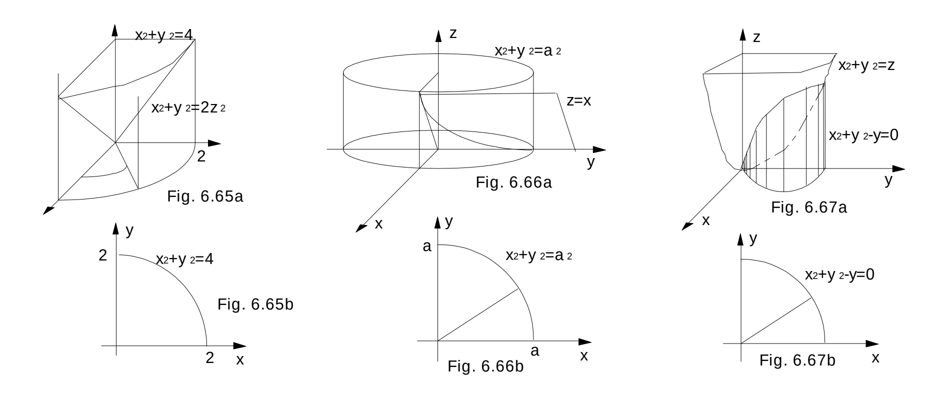
la Fig. ###, la proyección sobre el plano $xy$ es la porción del primer cuadrante limitada por (Fig. ###)

$$x^2 + y^2 = 4$$

Entonces, con respecto de $y$ integramos desde la recta $y = 0$ hasta la curva $y = \sqrt{4 - x^2}$ (ec. obtenida de $x^2 + y^2 = 4$) y con respecto de $x$ en la proyección sobre el eje $x$ que va desde $x = 0$ hasta $x = 2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} V &= 8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dzdydx = 8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4 - x^2}dydx = 8\int_0^2 \left(4 - x^2\right) dx \\ &= 8\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{128}{3} \end{aligned}$$

64. Calcular el volumen limitado por $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 2z^2$, $z = 0$.




Solución. Conviene pasar a coordenadas cilíndricas. Entonces

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 4 \quad &\Rightarrow \quad r = 2 \\ x^2 + y^2 = 2z^2 \quad &\Rightarrow \quad r = \sqrt{2}z \end{aligned}$$

Por la simetría, vamos a calcular solamente el volumen de la porción del primer octante y lo multiplicaremos por 4 para obtener el volumen pedido. Primeramente integramos con respecto de $z$ desde el plano $z = 0$ hasta el cono $z = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ (ecuación obtenida de $r = \sqrt{2}z$). De la Fig. ###, la proyección sobre el plano $xy$ es la porción del primer cuadrante limitada por $r = 2$ (ó $x^2 + y^2 = 4$); entonces integramos con respecto de $r$ desde el origen $r = 0$ hasta la circunferencia $r = 2$. Para cubrir la porción del primer cuadrante $\theta$ varía desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. (Fig. ###). Por tanto, teniendo en cueta el jacobiano de la transformación, el volumen

pedido es:

$$\begin{aligned} V &= 4\int_0^{\pi/4}\int_0^2\int_0^{\sqrt{2}r} r dz dr d\theta = 4\int_0^{\pi/4}\int_0^2 \sqrt{2}r^2 dr d\theta = 4\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{2}}{3}r^3\Big|_0^2 d\theta \\ &= \frac{32\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/4} d\theta = \frac{32\sqrt{2}}{3}\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi \end{aligned}$$

65. Hallar el volumen limitado por $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, $z=x$.
Solución. Aunque al pasar a coordenadas cilíndricas la ecuación de un plano no se simplifica, en este caso preferimos pasar a tales coordenadas. Entonces

$$\begin{aligned} x^2+y^2=a^2 &\Rightarrow r=a \\ z=x &\Rightarrow z=r\cos\theta \\ z=0 &\Rightarrow z=0 \end{aligned}$$

Por la simetría, vamos a calcular el volumen de la porción que está en el primer octante (Fig. ###) y lo multiplicaremos por 2 (pues se presenta el mismo volumen a la izquierda) para obtener el volumen pedido. Primero integramos con respecto de $z$ desde el plano $z=0$ hasta el plano $z=r\cos\theta$. De la Fig. ###, la proyección sore el plano $xy$ es la región del primer cuadrante limitada por $r=a$ (ó $x^2+y^2=a^2$). Con respecto de $r$ integramos desde el origen $r=0$ hasta la circunferencia $r=a$ y para ubrir la porción del primer cuadrante el ángulo $\theta$ debe variar desde $\theta=0$ hasta $\theta=\frac{\pi}{2}$ (Fig. ###). Por tanto, teniendo en cuenta el jacobiano de la transformación, el volumen pedido es:

$$\begin{aligned} V &= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^a\int_0^{r\cos\theta} r dz dr d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^a r^2\cos\theta dr d\theta = 22\int_0^{\pi/2} \frac{r^3}{3}\cos\theta\Big|_0^a d\theta \\ &= \frac{2}{3}a^3\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{2}{3}a^3\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}a^3 \end{aligned}$$

66. Calcular el volumen limitado por $x^2+y^2=z$, $x^2+y^2-y=0$, $z=0$.
Solución. Debido a la presencia de $x^2+y^2$ en las ecuaciones dadas, conviene pasar a coordenadas cilíndricas. Entonces

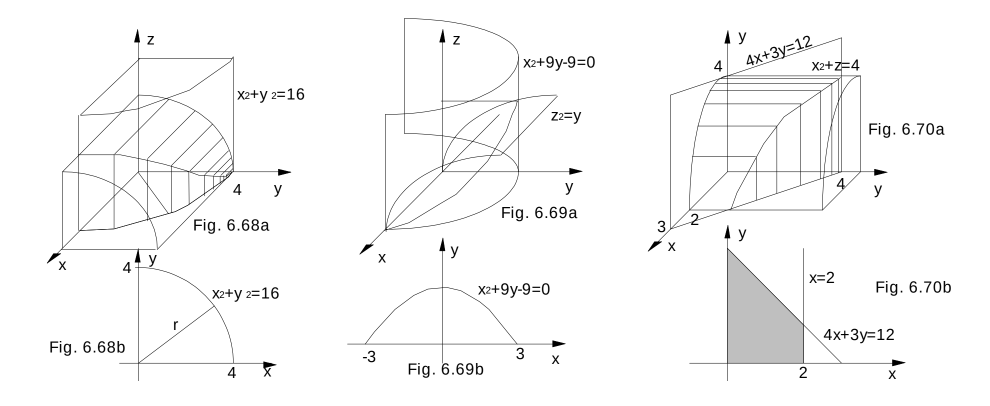
$$\begin{aligned} x^2+y^2=z &\Rightarrow z=r^2 \\ x^2+y^2-y=0 &\Rightarrow r=\sin\theta \\ z=0 &\Rightarrow z=0 \end{aligned}$$

Por la simetría, calcularemos solamente el volumen de la porción del primer octante y lo multiplicaremos por 2 para obtener el volumen pedido (figura 6.66a). Primero integramos con respecto de $z$ desde el plano $z=0$ hasta el paraboloide $z=r^2$. De la figura 6.66a, la proyección sobre el plano $xy$ es la porción del primer cuadrante limitada por $r=\sin\theta$ (ó

$x^2+y^2-y=0$). Integramos con respecto de $r$ desde el origen $r=0$ hasta la circunferencia $r=\sin\theta$; y el ángulo $\theta$ debe variar desde $\theta=0$ hasta $\theta=\frac{\pi}{2}$ para cubrir la porción del primer cuadrante (figura 6.66b). Por tanto, teniendo en cuenta el jacobiano de la transformación, el volumen pedido es

$$\begin{aligned} V &= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta}\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta} r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{\sin\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left.\left(\frac{3\theta}{8}-\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{\sin 4\theta}{32}\right)\right|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{32} \end{aligned}$$

67. Hallar el volumen limitado por $y^2+4z=16$, $x^2+y^2=16$, $z=0$.




Solución. No conviene integrar en coordenadas cartesianas, los cálculo se simplifican considerablemente pasando a coordenadas cilíndrias. Entones

$$\begin{array}{lll} x^2+y^2=16 & \Rightarrow & r=4 \quad (1)\\ y^2+4z=16 & \Rightarrow & r^2\sin^2\theta+4z=16 \quad (2)\\ z=0 & \Rightarrow & z=0 \quad (3) \end{array}$$

Por simetría, calcularemos solamente el volumen de la porción del primer octante (figura 6.67a) y lo multiplicaremos por 4.

Integramos primeramente con respecto de $z$ desde el plano $z=0$ hasta el paraboloide $z=4-\frac{r^2\sin\theta}{4}$ (ecuacióm obtenida de (2)). De la figura 6.67a, la proyección sobre el plano $xy$ es la porción del primer cuadrante limitada por $r=4$ (ó $x^2+y^2=16$). Entonces integramos con respecto de $r$ desde el origen $r=0$ hasta la circunferencia $r=4$ y el ángulo $\theta$ varía desde $\theta=0$ hasta $\theta=\frac{\pi}{2}$ para cubrir la porción del primer cuadrante figura 6.67b). Por tanto, teniendo en cuenta el jacobiano de la transformación,

el volumen pedido es

$$
\begin{aligned}
V &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^4\int_0^{4-r^2\sin^2\theta/4} r dz dr d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^4\left(4r-\frac{r^3}{4}\sin^2\theta\right)dr d\theta = 4\int_0^{\pi/2} 2r^2-\frac{r^4}{16}\text{si}\\
&= 4\int_0^{\pi/2}\left(32-16\sin^2\theta\right)d\theta = 4\left(32\theta-8\theta+4\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} = 48\pi
\end{aligned}
$$

68. Hallar el volumen encerrado por $z^2 = y$, $x^2 + 9y - 9 = 0$.
Solución. Por la simetría, calcularemos el volumen de la porción que está en el primer octante (figura 6.68a) y lo multiplicaremos por 4 para obtener el volumen pedido. Primeramente integramos con respecto de $z$ desde el plano $z = 0$ hasta la superficie $z = \sqrt{y}$ (ec. obtenida de $z^2 = y$). De la figura 6.68a, la proyección sore el plano $xy$ es la porción del primer cuadrante limitada por $x^2+9y-9 = 0$. Entonces integramos con respecto de $y$ desde la recta $y = 0$ hasta la parábola $y = \dfrac{9-x^2}{9}$ (ecuación obtenida de $x^2+9y-9 = 0$); y con respecto de $x$ en la proyección sobre el eje $x$ que va desde $x = 0$ hasta $x = 3$ (figura 6.68b). Por tanto, el volumen pedido es:

$$
\begin{aligned}
V &= 4\int_0^3\int_0^{\frac{9-x^2}{9}}\int_0^{\sqrt{y}} dz dy dx = 4\int_0^3\int_0^{\frac{9-x^2}{9}}\sqrt{y} dy dx = 4\int_0^3 \frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_0^{\frac{9-x^2}{9}} dx = \frac{8}{3}\int_0^3\left(\frac{9-x^2}{9}\right.\\
&= \frac{8}{81}\int_0^3\left(9-x^2\right)^{3/2}dx = \frac{8}{81}\ \frac{x}{4}\left(9-x^2\right)^{3/2}+\frac{27x}{8}\left(9-x^2\right)^{1/2}+\frac{243}{8}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

**Nota**. Notemos que en este ejercicio no conviene efectuar ningún cambio de variable. Ver ejercicio 62.

69. Hallar el volumen de la región limitada por $4x + 3y = 12$, $x^2 + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
Solución. Toda la región está ubicada en el primer cuadrante (Figura 6.69a). Primeramente integramos con respecto de $z$ desde el plano $z = 0$ hasta la superficie $z = 4 - x^2$ (ec. obtenida de $x^2 + z = 4$). La proyección sobre el plano $xy$ se obtiene eliminando $z$ del sistema:

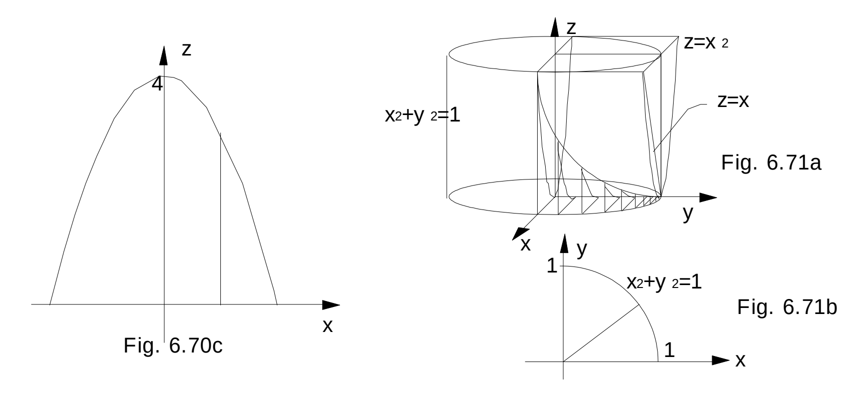
$$
\begin{array}{lll}
4x+3y=12 & \Rightarrow\ 4x+3y=12 & (1)\\
x^2+z=4 & \Rightarrow\ x=2 \text{ (de } x^2=4) & (2)\\
x=0 & \Rightarrow\ x=0 & (3)\\
y=0 & \Rightarrow\ y=0 & (4)\\
z=0 & &
\end{array}
$$

Notemos que en (2) de $x^2 = 4$ se tiene las rectas $x = 2$, $x = -2$, pero solamente consideramos $x = 2$ por estar la proyección en el primer cuadrante. La proyección también se puede obtener observando la figura 6.69a. Entonces, con respecto de $y$ integramos desde la recta $y = 0$ hasta la recta

$ry = 4 - \dfrac{4x}{3}$; y con respecto de $x$ en la proyección sobre el eje $x$ que va desde $x = 0$ hasta $x = 2$. (figura 6.69b). Por tanto, el volumen pedido es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \int_0^{4-\frac{4}{3}x} \int_0^{4-x^2} dzdydx = \int_0^2 \int_0^{4-\frac{4}{3}x} \left(4-x^2\right) dydx = \int_0^2 \left(4-x^2\right)\left(4-\frac{4}{3}x\right) dx = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{4}{3}x^3 - 4x^2 - \frac{16}{3}x + 16\right) dx = \left(\frac{x^4}{3} - \frac{4x^3}{3} - \frac{8}{3}x + 16x\right)\Bigg|_0^2 = 16 \end{aligned}$$

70. Resolver el ejercicio 68 proyectando la región sobre el plano coordenado $xz$.




Solución. Integramos primero con respecto de $y$ desde el plano $y = 0$ hasta el plano $y = 4 - \dfrac{4x}{3}$, ec. obtenida de $4x + 3y = 12$ (ver figura 6.69a). Observando la figura 6.69a, la proyección sobre el plano $xz$ es la porción del primer cuadrante limitada por la parábola $x^2 + z = 4$ (figura 6.69c). Entonces integramos con respecto de $z$ desde la recta $z = 0$ hasta la parábola $z = 4 - x^2$ y con respecto de $x$ en la proyección sobre el eje $x$ que va desde $x = 0$ hasta $x = 2$. Por tanto,

$$V = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^{4-\frac{4}{3}x} dydzdx = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \left(4 - \frac{4}{3}x\right) dzdx = \int_0^2 \left(4 - \frac{4}{3}x\right)\left(4-x^2\right) dx = 16$$

**Nota**. Notemos que en este caso es más conveniente proyectar sobre el plano $xz$ (ejercicio 69), pues dicha proyección se obtiene más fácilmente que proyectando sobre el plano $xy$ (ejercicio 68).

71. Calcular el volumen limitado por $z = x$, $z = x^2$, $x^2 + y^2 = 1$.
Solución. Por la simetría, vamos a calcular solamente el volumen de la

porción que está en el primer octante (figura 6.70a) y lo multiplicaremos por 2 (pues, a la izquierda se presenta un volumen igual) para obtener el volumen pedido. Primeramente integraremos con respecto de $z$ desde la superficie $z = x^2$ hasta el plano $z = x$. De la figura 6.70a, la proyección sobre el plano $xy$ es la porción del primer cuadrante limitada por $x^2+y^2 = 1$ (figura 6.70b). Entonces con respecto de $y$ integramos desde la recta $y = 0$ hasta $y = \sqrt{1-x^2}$ (ecuación obtenida de $x^2 + y^2 = 1$) y con respecto de $x$ en la proyección sobre el eje $x$ que va desde $x = 0$ hasta $x = 1$. Por tanto, el volumen pedido es

$$\begin{aligned} V &= 2\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2}^{x} dzdydx = 2\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(x-x^2\right) dydx = 2\int_0^1 \left(x-x^2\right)\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= 2\int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} - x^2\sqrt{1-x^2}\right) dx = 2\left(-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2} + \frac{x}{4}\left(1-x^2\right)^{3/2} - \frac{1}{8}\left(x\sqrt{1-x^2} +\right.\right. \\ &= -2\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

72. Hallar el volumen encerrado por $x^2 + 4y^2 + z = 1$, $x^2 + 4y^2 - 4z = 1$.

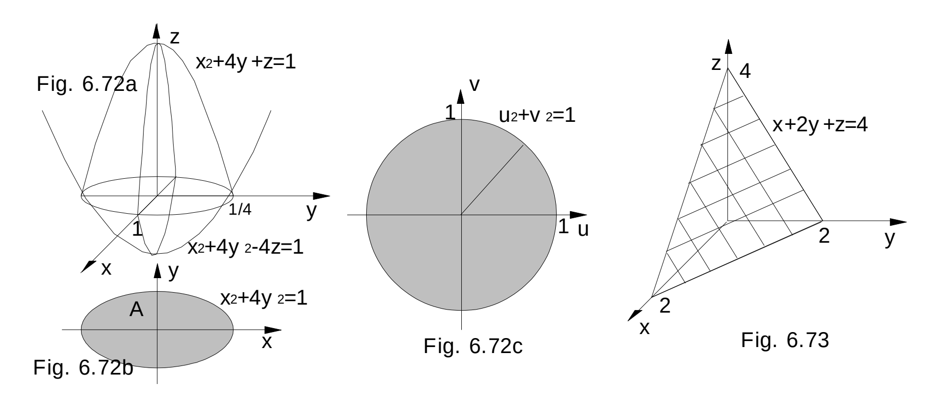


Fig. 6.72a Fig. 6.72b Fig. 6.72c Fig. 6.73

Solución. El volumen es de forma ovoide, con la parte superior más grande que la inferior (figura 6.71a).
Primeramente integramos con respecto de $z$ desde el paraboloide. $z = \frac{1-x^2-4y^2}{4}$ (ecuación obtenida de $x^2 + 4y^2 - 4z = 1$) hasta el paraboloide $z = 1 - x^2 - 4y^2$ (ec. obtenida de $x^2 + 4y^2 + z = 1$). De la figura 6.71a, la proyección sobre el plano $xy$ obtenemos haciendo $z = 0$.

$$\begin{matrix} x^2 + 4y^2 + z = 1 \\ x^2 + 4y^2 - 4z = 1 \end{matrix} \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 1 \qquad (1)$$

Entonces con respecto de $x$ y de $y$ debemos integrar en la elipse $A$ (figura

6.71b). Entonces

$$V = \iiint_{(1-x^2-4y^2)/4}^{1-x^2-4y^2} dzdxdy = \frac{5}{4}\iint_A \left(1 - x^2 - 4y^2\right) dxdy \qquad (2)$$

Para calcular (2) conviene hacer el cambio $u = x$, $v = 2y$; para transformar la elipse en una circunferencia (figura 6.71c):

$$x^2 + 4y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u^2 + v^2 = 1 \qquad (3)$$

Del ejercicio 35, el jacobiano de esta transformación es $\frac{1}{2}$. Para integrar sobre esta circunferencia pasamos a coordenadas polares (cuyo jacobiano es $r$) e integramos desde el origen $r = 0$, hasta la circunferencia $r = 1$ (ec. obtenida de (3)), variando $\theta$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$. Por tanto, retomando (2) tenemos:

$$\begin{aligned} V &= \frac{5}{4}\iint_A \left(1 - x^2 - 4y^2\right) dxdy = \frac{5}{4}\iint \left(1 - u^2 - v^2\right) \frac{1}{2} dudv = \frac{5}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 - r^2\right) \frac{1}{2} rdrd\theta \\ &= \frac{5}{8}\int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 d\theta = \frac{5}{32}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{5}{32}\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{5\pi}{16} \end{aligned}$$

**MASAS, MOMENTO, CENTRO DE GRAVEDAD, CENTROIDE DE REGIONES SOLIDAS**

73. Hallar el centroide de la región del primer octante limitada por $2x+2y+z = 4$.
Solución. Antes que nada, notemos que por la simetría tenemos $\overline{x} = \overline{y}$. Por otra parte,

$$\overline{x} = \frac{\text{momento despecto al plano } yz}{\text{masa total}} = \frac{\iiint xdV}{\iiint dV} \qquad (1)$$

Como

$$\begin{aligned} \iiint xdV &= \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{4-2y-2x} xdzdydx = \int_0^2 \int_0^{2-x} (2 - 2y - 2x)\, dydx = \int_0^2 2\,(2-x)\,xy - xy^2\Big|_0^2 dx \\ &= \int_0^2 x\,(2-x)^2\, dx = \frac{4}{3} \qquad (2) \end{aligned}$$

y

$$\iiint dV = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{4-2y-2x} dzdydx = \int_0^2 \int_0^{2-x} (4-2y-2x)\,dydx = \int_0^2 \int_0^{2-x} 2\,(2-x)\,y - y^2\Big|_0^{2-x} dx$$
$$= \int_0^2 (2-x)^2\,dx = \frac{8}{3} \qquad (3)$$

Entonces, de (1), (2), (3) obtenemos:

$$\overline{x} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{1}{2}$$

Además,

$$\overline{z} = \frac{\text{momento respecto al plano } xy}{\text{masa total}} = \frac{\iiint zdV}{\iiint dV} \qquad (4)$$

y como

$$\iiint_V zdV = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{4-2y-2x} zdzdydx = \int_0^2 \int_0^{2-x} \frac{z^2}{2}\Big|_0^{4-2y-2x} dydx = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{2-x} (4-2y$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^2 -\frac{1}{2\cdot 3}(4-2y-2x)^3\Big|_0^{2-x} dx = \frac{1}{12} \int_0^2 8\,(2-x)^2\,dx = \frac{2}{3} \qquad (5)$$

Entonces, de (3), (4), (5), obtenemos:

$$\overline{z} = \frac{2/3}{8/3} = \frac{1}{4}$$

Por tanto, el centroide $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ está dado por $\overline{x} = \overline{y} = \dfrac{1}{2}$, $\overline{z} = \dfrac{1}{4}$.

74. Hallar el momento de inercia de un cilindro circular recto de radio $a$ y altura $h$ con respecto a su eje, si la densidad es proporcional a su distancia

al eje.

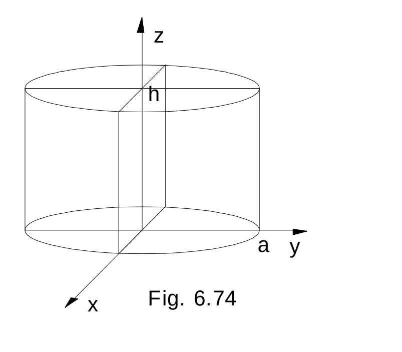


Fig. 6.74

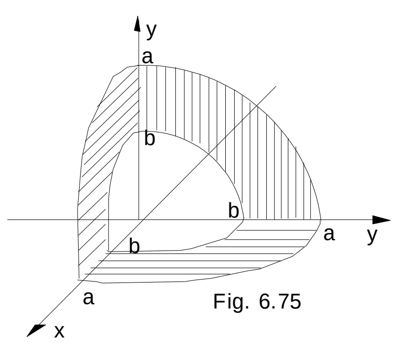


Fig. 6.75

Solución. Consideremos el cilindro limitado por $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $z = h$ (figura 6.73). La distancia al eje del cilindro (el eje $z$) es $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ y, por tanto, la densidad es $\delta = k\sqrt{x^2 + y^2}$, donde $k$ =cte. de proporcionalidad. El momento de inercia con respecto al eje $z$ es

$$I_z = \iiint_V d^2(x, y, z)\,\delta(x, y, z)\,dV = \iiint_V k\left(x^2 + y^2\right)^{3/2} dV$$

calculamos esta integral pasando a coordenadas cilíndrias:

$$I_z = k\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^h r^3 r\,dz\,dr\,d\theta = k\int_0^{2\pi}\int_0^a hr^4\,dr\,d\theta = kh\int_0^{2\pi} \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^a d\theta = \frac{kh}{5}\int_0^{2\pi} \left.a^5\right|_0^{2\pi} d\theta = \frac{2}{5}k\pi ha^5$$

**Nota**. La masa del cuerpo es:

$$M = \iiint_V \delta(x, y, z)\,dV = \iiint_V k\sqrt{x^2 + y^2}\,dV = \frac{2}{3}k\pi ha^3.$$

Entonces,

$$I_z = \frac{3}{5}Ma^2$$

75. Hallar el centro de gravedad de una cúpula hemisférica de radio exterior $a$ y radio interior $b$, si la densidad es proporcional al cuadrado de la distancia a la base. Discutir el caso $a = b$.
Solución. Consideremos la cúpula limitada por $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x^2+y^2+z^2 = b^2$, $z \geq 0$, $a > b$ (figura 6.74). Como la distancia al plano $xy$ es $z$, la densidad en el punto $(x, y, z)$ es $\delta(x, y, z) = kz^2$, donde $k$ constante de proporcionalidad. Por la simetría con respecto al eje $z$, tenemos $\overline{x} = \overline{y} = 0$. Por otra parte

$$\overline{z} = \frac{\iiint_V z\delta(x, y, z)\,dV}{\iiint_V \delta(x, y, z)\,dV} \quad (1)$$

Utilizando coordenadas esféricas para calcular el numerador de (1) tenemos

$$\begin{aligned}
\iiint_V z\delta(x,y,z)\,dV &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_b^a k\rho^2\cos^3\phi\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta = 4k\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\frac{\rho^6}{6}\cos^3\phi\sin \\
&= \frac{2}{3}\left(a^6-b^6\right)\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos^3\phi\sin\phi d\phi d\theta = \frac{2}{3}k\left(a^6-b^6\right)\int_0^{\pi/2}-\left.\frac{\cos^4\phi}{4}\right|_0 \\
&= \frac{k}{6}\left(a^6-b^6\right)\int_0^{\pi/2}d\theta = \frac{k\pi}{12}\left(a^6-b^6\right) \qquad (2)
\end{aligned}$$

calculamos el denominador:

$$\begin{aligned}
\iiint_V \delta(x,y,z)\,dV &= \iiint_V kz^2dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_b^{\pi a} k\rho^2\cos^2\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta \\
&= 4k\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\left.\frac{\rho^5}{5}\cos^2\phi\sin\phi\right|_b^a d\phi d\theta = \frac{4}{5}\left(a^5-b^5\right)\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos^2\sin\phi d \\
&= \frac{4}{5}k\left(a^5-b^5\right)\int_0^{\pi/2}-\left.\frac{\cos^3\phi}{3}\right|_0^{\pi/2}d\theta = \frac{4}{5}k\left(a^5-b^5\right)\int_0^{\pi/2}d\theta = \frac{2}{15}k\pi\left(a^5-\right.
\end{aligned}$$

De (1), (2) y (3) tenemos:

$$\overline{z} = \frac{\frac{k\pi}{12}\left(a^6-b^6\right)}{\frac{2}{15}k\pi\left(a^5-b^5\right)} = \frac{5}{8}\frac{a^6-b^6}{a^5-b^5}$$

Por tanto, el centro de gravedad $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ está dado por

$$\overline{x}=\overline{y},\ \overline{z}=\frac{5}{8}\frac{a^6-b^6}{a^5-b^5}$$

Ahora, consideremos el caso $a=b$: Si el espesor de la cúpula va disminuyendo (por ejemplo con $b\to a$), en el límite (es decir, $a=b$) obtenemos teóricamente una lámina cupular de radio $a$. En este caso, el centro de gravedad $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ está dado por $\overline{x}=0$, $\overline{y}=0$. La coordenada $\overline{z}$ es

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \lim_{b\to a}\frac{5}{8}\frac{a^6-b^6}{a^5-b^5} = \lim_{b\to a}\frac{5}{8}\frac{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)\left(a^3+b^3\right)}{(a-b)\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right)} \\
&= \lim_{b\to a}\frac{5}{8}\frac{\left(a^2+ab+b^2\right)\left(a^3+b^3\right)}{\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right)} = \frac{5}{8}\frac{6a^5}{5a^4} = \frac{3}{4}a
\end{aligned}$$

## 6.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea $A$ el rectángulo con vértices $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(-1,2)$, calcular aproximadamente el valor de la integral

$$\iint_A \left(1+x^2y\right)dA$$

a) Dividiendo $A$ en dos partes, b) dividiendo $A$ en cuatro partes.

2. Sea $A$ el triángulo limitado por $x = 0$, $y = 0$, $z + y = 1$; calcular aproximadamente el valor de la integral

$$\iint_A e^{\left(x^2+y^2\right)} dA$$

**INTEGRALES ITERADAS**

Calcular.

3. $\displaystyle\int_0^1 \int_1^2 dxdy.$

4. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} xe^y dydx.$

5. $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2 dydx.$

6. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{y^{3/2}} \frac{x}{y^2} dxdy.$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 \cos\theta dr d\theta.$

8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos\theta} r^3 \cos^2\theta dr d\theta.$

**CÁLCULO DE INTEGRALES DOBLES**

Calcular:

9. $\displaystyle\iint_A x^2 dxdy$, siendo $A$ el rectángulo limitado por $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$.

10. $\displaystyle\iint_A ydxdy$, si $A$ es el triángulo limitado por $y = x$, $x + y = 2$, $x = 0$.

11. $\displaystyle\iint_A xydxdy$, donde $A$ es el cuadrilátero limitado por $x+y = 1$, $x+y = 3$, $y = 0$, $y = 1$.

12. $\displaystyle\iint_A (1 + 2x)\, dxdy$, donde $A$ es la región limitada por $y = x^2$, $x = y$.

13. $\displaystyle\iint_A \left(x^2 + y\right) dxdy$, donde $A$ es la región limitada por $y = x^2$, $x = y^3$.

14. $\displaystyle\iint_A y^2 dxdy$, donde $A$ es la región del primer cuadrante limitada por $xy = 4$, $x = y$, $y = x - 1$.

15. $\displaystyle\iint_A e^{x+y}dxdy$, donde $A$ es la región $|x| + |y| \leq 1$.

16. $\displaystyle\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{2a - x}}$, donde $A$ es el círculo de radio $a$ y tangente a los ejes coordenados que se encuentran en el primer cuadrante.

**CAMBIO DEL ORDEN DE INTEGRACION**

Grafiar la región de integración e invertir el orden de integración.

17. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x, y)\, dxdy$.

18. $\displaystyle\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y)\, dxdy$.

19. $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x, y)\, dxdy$.

20. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} dydx$.

21. $\displaystyle\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dydx$.

22. $\displaystyle\int_{-6}^2 \int_{(x^2-4)/4}^{2-x} f(x, y)\, dydx$

23. Calcular $\displaystyle\int_0^3 \int_x^3 e^{-y^2} dydx$, invirtiendo previamente el orden de integración.

**AREAS DE REGIONES PLANAS**

En los ejercicios siguientes hallar el área de la región limitada por las curvas dadas.

24. $3x + 4y = 24$, $x = 0$, $y = 0$.

25. $x + y = 2$, $2y = x + 4$, $y = 0$.

26. $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$.

27. $y^2 = 5 - x$, $y = x + 1$.

28. $y^2 = 4ax$, $y = 0$, $x + y = 3a$.

29. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x + y = a$.

30. $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$.

31. $y^2 = 2 - x$, $y^2 = 2x - 2$.

32. $y = x^2$, $x = y^3$.

33. $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 2$.

34. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = a - x$.

35. $(y - x)^2 + x^2 = 1$.

36. $y = x^3 - x$, $y = x - x^3$.

37. $y = x^2$, $y = x$, $y = 3x$.

38. $x + 3y = 3$, $x + 3y = 6$, $y = 2x$, $y = 2x + 1$ (Sugerencia: Efectuar un cambio de variable).

39. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (Sugerencia: Efectuar un cambio de variable).

40. $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$, $0 < a < b$ (Sugerencia: Pasar a coordenadas polares).

41. $y = x^3$, $y = 4x^3$, $x = y^3$, $x = 4y^3$ (Sugerencia: Efectuar un cambio de variable).

42. $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = c$, $xy = d$ $(0 < a < b,\ 0 < c < d)$.

43. Area encerrada por $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.
**MASA, DENSIDAD MEDIA, CENTRO DE GRAVEDAD, CENTROIDE, MOMENTOS.**

44. Si $A$ es la región limitada por $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$ y la densidad es $\delta(x, y) = x$, hallar: a) La masa, b) la densidad media, c) el centro de gravedad, d) los momentos con respecto a los ejes $x$ e $y$, e) los segundos momentos con respecto a los ejes $x$ e $y$, f) el momento polar de inercia con respecto al origen.
En los siguientes cuatro ejercicios hallar el centroide de cada una de las regiones limitadas por las curvas dadas

45. $y = x^2$, $x + y = 2$.

46. $y^2 = x + 3$, $y^2 = 5 - x$.

47. a) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/4$. b). $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

48. Una lámina delgada está limitada por el arco de parábola $y = 2x - x^2$ y el intervalo $0 \leq x \leq 2$. Determinar su masa si la densidad en cada punto $(x, y)$ es $\delta(x, y) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$.

49. Determinar el centro de gravedad de una lámina delgada rectangular $ABCD$ si la densidad en todos sus puntos es igual al producto de sus distancias a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$.
En los siguientes cuatro ejercicios calular los momentos de inercia $I_x$ e $I_y$ de una lámina delgada limitada por las curvas indicadas con la densidad $\delta(x, y)$ indicada.

50. $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, $y=0$, $\delta(x,y)=1$.

51. $(x-R)^2+(y-R)^2=R^2$, $x=0$, $y=0$, $0\le x\le R$, $0\le y\le R$, $\delta(x,y)=1$.

52. $xy=1$, $xy=2$, $y=2x$, $x>0$, $y>0$, $\delta(x,y)=1$.

53. $y=e^x$, $y=0$, $0\le x\le a$, $\delta(x,y)=xy$.

**TEOREMA DE PAPPUS.**

54. Hallar el volumen de un cono recto circular de altura $h$ y radio basal $r$.

55. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar la elipse $4(x-6)^2+9(y-5)^2=36$ alrededor del eje $x$.

56. Hallar el volumen generado por revolución del círculo $x^2+(x-b)^2=a^2$, $b>a>0$ en torno al eje $x$.

**PROBLEMAS VARIOS DE INTEGRALES DOBLES.**

57. Mostrar que $\int_0^1\int_0^{1-x} e^{y/(x+y)}dydx=\frac{e-1}{2}$.

58. Calcular $\iint_A (x^2+y^2)\,dxdy$, donde $A$ es el paralelogramo de vértices $(1,1)$, $(5,2)$, $(6,5)$, $(2,-1)$ (Sugerencia: Hacer $x=1+4u+v$, $y=1+u+3v$).

59. Calcular $\iint_A \frac{y}{x^2+y^2}dA$, $A$ es la porción del anillo $1\le x^2+y^2\le 4$ en el segundo cuadrante.

60. Calcular $\iint_A \frac{1}{(1+y^2+y^2)^{3/2}}dA$, donde $A$ es todo el plano $R^2$ (Sugerencia: Usar la idea del ejercicio resuelto 45).

**INTEGRALES TRIPLES**

61. Si $V$ es el conjunto $0\le x\le 2$, $0\le y\le 3$, $1\le z\le 2$, calcular aproximadamente la integral triple.

$$\iiint_V xyzdV$$

**CALCULO DE INTEGRALES TRIPLES**

62. $\int_0^2\int_0^1\int_1^2 dzdydx$.

63. $\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^2 zr^2\sin\theta dzdrd\theta$.

64. $\int_0^4\int_0^{2\sqrt{z}}\int_0^{\sqrt{4z-x^2}} dydxdz$.

65. $\displaystyle\int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} z dz dx dy.$

66. Calcular el volumen del tetraedro limitado por $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ y los planos coordenados.

67. Hallar el volumen del sólido limitado por $x + y = 1$, $x = 2y$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 4$.

68. Hallar el volumen encerrado por $x - y + 2z = 0$, $y = 2$, $x = 0$, $z = 0$.

69. Calcular el volumen encerrado por $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

70. Hallar el volumen del sólido limitado $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = az^2$, $z = 0$.

71. Calcular el volumen encerrado por los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$.

72. Calcular el volumen limitado por $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 2y$.

73. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el cilindro $x^2 - x + y = 0$, el plano $z = 0$, $y = 0$.

74. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

75. Hallar el volumen limitado por $x^2 + az = a^2$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

76. Hallar el volumen limitad superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, e inferiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

77. Calcular el volumen de la región limitada superiormente por $x^2+y^2+z^2 = 1$ e inferiormente por $z = x^2 + y^2$.

78. Calcular el volumen encerrado por $z^2 + 4y - 4 = 0$, $x^2 = y$.

79. Hallar el volumen de la región limitada por $x^2 + y = 9$, $x + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

80. Hallar el volumen limitado por $x^2 + y^2 = 1$, $z = y$, $z = y^2$.

81. Calcular el volumen encerrado entre los paraboloides $x^2 + a^2y^2 + z = 1$, $x^2 + a^2y^2 - 2z = 1$.

**MASA. MOMENTO. CENTRO DE GRAVEDAD. CENTROIDE DE REGIONES SOLIDAS**

82. Hallar el centroide de la región del primer octante limitada por $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c} = 1$, donde $a$, $b$, $c$ son positivos.

83. Hallar el momento de inercia de un cilindro circular recto de radio $a$ y altura $h$ con respecto a su eje si la densidad es proporcional a su distancia a la base.

84. Hallar la masa de una esfera de radio $R$, siendo la densidad en cada punto proporcional a su distancia a un plano diametral fijo.

85. Hallar la masa de un cono circular de altura $h$ y radio de la base $R$, siendo la densidad en cada punto proporcional a su distancia al eje.

86. Hallar el centro de gravedad de un cubo de arista $a$, siendo la densidad en cada punto igual a la suma de sus distancias a tres aristas adyacentes (ejes coordenados).

**PROBLEMAS VARIOS DE INTEGRALES TRIPLES**

87. Hallar el volumen encerrado por $y^2 + x^2 = 4x = 8$, $y^2 + z^2 = 4$, $x = 0$.

88. Hallar el volumen de la región limitada por la esfera $r = 2a\cos\phi$ y el cono $\phi = b$, donde $0 < b < \pi/2$. Discutir el caso $b = \pi/2$.

89. Hallar a) el volumen y b) el centroide de la región limitada superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e inferiormente por el plano $z = c$, con $R > c > 0$.

90. Calcular $\displaystyle\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$, siendo $V$ la región encerrada por el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

91. Calcular el momento de inercia del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ con respecto a sus ejes.

92. Hallar el volumen limitado por los cilindros hiperbólicos $xy = 1$, $xy = 9$, $xz = 4$, $xz = 36$ (Sugerencias: efectuar un cambio de variable).

93. Hallar la masa de una superficie esférica siendo la densidad en cada punto proporcional a su distancia al origen de coordenadas.

94. Hallar la ecuación del plano paralelo al plano $xy$ que divide en dos partes de volumenes iguales a la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

95. Demostrar que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

(Sugerencia: Desarrollar los jacobianos, multiplicarlos y utilizar la regla de la cadena).

# Chapter 7

# INTEGRALES CURVILINEAS Y DE SUPERFICIE

La extensión natural de un intervalo $[a, b]$ de la recta real al plano es una región plana $A$, y la extensión natural de $A$ al espacio es un sólido $V$.

La integral de $f(x)$ sobre $[a, b]$ ha sido estudiada en el Cálculo I, la integral de una función de dos variables $f(x, y)$, sobre $A$ y la integral de una función de tres variables $f(x, y, z)$ sobre $V$ se a estudiado en el Capítulo 6 de las integrales múltiples.

En este capítulo la idea de integral se extiende en otra dirección: El intervalo $[a, b]$ se extiende al plano en forma de una curva y sobre esta curva se define una integral llamada integral curvilínea. La región plana $A$ se extiende al espacio en forma de una superficie y sobre esta superficie se define una integral llamada integral de superficie. Usando estas ideas se puede calcular el área encerrada por una curva, el área de una superficie. Al final del capítulo, la integral curvilínea y la integral de superficie se combinan en los notables teoremas integrales.

## 7.1 INTEGRALES CURVILINEAS

Consideremos una curva $C$ del plano $xy$ que une los puntos $(a_1, b_1)$ y $(a_2, b_2)$ como en la figura 7.1. Además, sean $P(x, y)$, $Q(x, y)$ dos funciones definidas

sobre la curva $C$.

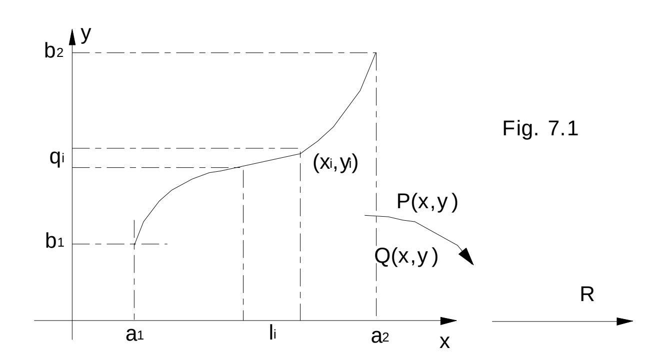


Fig. 7.1

Dividamos la curva en $n$ partes y designemos por $l_i$ y $q_i$ a las longitudes de la proyección del i-esimo pedazo de la curva sobre el eje $x$ y el eje $y$, respectivamente.

De cada pedazo de la curva elijamos arbitrariamente un punto $(x_i, y_i)$ donde evaluamos las funciones $P$ y $Q$.

Formemos la suma

$$S_n = [P(x_1, y_1) l_1 + ... + P(x_n, y_n) l_n] + [Q(x_1, y_1) q_1 + ... + Q(x_n, y_n) q_n] \tag{7.1}$$

Si el límite de $S_n$ existe, cuando el número de subdivisiones aumenta (es decir, $n \to \infty$) y los pedazos son todos cada vez más pequeños (es decir, $\max l_i \to 0$, $\max q_i \to 0$); entonces a tal límite se llama **integral curvilínea** a lo largo de $C$ y se representa por

$$\int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \quad \text{ó} \qquad \int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} Pdx + Qdy \tag{7.2}$$

De la definición se deduce que $\int_C P(x, y)\, dx$ se integra sobre el intervalo $[a_1, a_2]$ del eje $x$, mientras que $\int_C Q(x, y)\, dy$ se integra sobre el intervalo $[b_1, b_2]$ del eje $y$. Por supuesto, en la primera integral $y$ se considera funcion de $x$, y en la segunda $x$ es función de $y$; por tanto ambas son integrales simples de una función de una sola variable sobre un intervalo, y el cálculo de integrales curvilíneas se reduce a calcular integrales definidas simples.

Las sumas (1) y la definición (2) se generalizan para curvas en el espacio obteniéndose integrales curvilíneas de la forma

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz$$

donde $C$ es una curva del espacio.

## 7.2 CALCULO DIRECTO DE INTEGRALES CURVILINEAS

El cálculo directo de integrales curvilíneas se reduce al cálculo ya conocido de integrales ordinarias. Si la curva $C$ está dada por una ecuación $y = f(x)$, entonces $dy = f'(x)\,dx$ y la integral curvilínea (2) se convierte en una integral simple:

$$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{a_1}^{a_2} P(x,f(x))\,dx + Q(x,f(x))\,f'(x)\,dx \quad (7.3)$$

**Example 61** *Una curva $C$ que une el origen con $(1,1)$ está dado por $y = x^2$. Entonces*

$$\begin{aligned}\int_C (x+y)\,dx + \left(2x^2 - y\right)dy &= \int_0^1 \left(x + x^2\right)dx + \left(2x^2 - x^2\right)2xdx \\ &= \int_0^1 \left(2x^3 + x^2 + x\right)dx = \left.\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Similarmente, si la curva $C$ está dada por una ecuación $x = g(x)$, entonces $dx = g'(y)\,dy$ y la integral curvilínea se convierte en una integral ordinaria:

$$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{b_1}^{b_2} P(g(y),y)\,g'(y)\,dy + Q(g(y),y)\,dy \quad (7.4)$$

**Example 62** *Una curva $C$ que une el origen con $(1,1)$ está cado por $x = y^3$. Entonces*

$$\begin{aligned}\int_C (2x-y)\,dx - xydy &= \int_0^1 \left(2y^3 - y\right)3y^2dy - y^3ydy = \int_0^1 \left(6y^5 - y^4 - 3y^3\right)dy \\ &= \left. y^6 - \frac{y^5}{5} - \frac{3y^4}{4}\right|_0^1 = \frac{-47}{60}\end{aligned}$$

Cuando la curva $C$ esta dada por $y = f(x)$, la podemos considerar como parametrizada por la variable $x$, mientras que si está dada por $x = g(y)$ se la considera parametrizada por $y$. En general, si la curva $C$ está parametrizada por la variable $t$ por medio de $x = x(t)$, $y = y(t)$ la integral curvilínea se convierte en

$$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{t_1}^{t_2} P(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt + Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt \quad (7.5)$$

donde $t_1$, $t_2$ son los valores de $t$ que corresponden a los puntos $(a_1, b_1)$ y $(a_2, b_2)$, respectivamente.

En la práctica, en un caso concreto y según convenga se puede combinar los métodos anteriores dados en (3), (4) y (5).

**Example 63** *Una curva $C$ que une el origen con $(1,1)$ está dada en forma paramétrica por $C(t) = \left(t^2, t^3\right)$. Entonces, teniendo en cuenta que a $(0,0)$ le corresponde $t = 0$ y al punto $(1,1)$ le corresponde $t = 1$.*

$$\begin{aligned}
\int\limits_C \left(x^{1/2} + y\right) dx + \left(x - y^{1/3}\right) dy &= \int\limits_{t=0}^{t=1} \left(t + t^3\right) 2tdt + \left(t^2 - t\right) 3t^2 dt \\
&= \int\limits_0^1 \left(5t^4 - 3t^3 + 2t^2\right) dt = t^5 - \frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 \Big|_0^1 \frac{11}{12}
\end{aligned}$$

Métodos similares se tienen para el cálculo de integrales curvilíneas en el espacio.

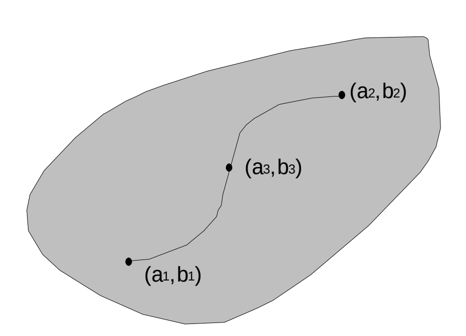
## 7.3 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL CURVILÍNEA

Como el cálculo de una integral curvilínea se reduce a una ordinaria, las propiedades de ambas son similares. Por ejemplo, si $C$ es una curva que une $(a_1, b_1)$ con el punto $(a_2, b_2)$ tenemos:

I. Si se invierte el camino de integración, el signo de la integral curvilínea cambia. Es decir

$$\int\limits_{(a_2,b_2)}^{(a_1,b_1)} Pdx + Qdy = -\int\limits_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} Pdx + Qdy \tag{7.6}$$

II. Se puede integrar por pedazos y la integral curvilínea sobre toda la curva es la suma de las integrales curvilíneas en cada pedazo. Es decir, si $(a_3, b_3)$ es otro punto de la curva $C$.



$$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} Pdx + Qdy = \int_{(a_1,b_1)}^{(a_3,b_3)} Pdx + Qdy + \int_{(a_3,b_3)}^{(a_2,b_2)} Pdx + Qdy \qquad (7.7)$$

Por supuesto, para integrales curvilíneas en el espacio se tienen propiedades similares.

## 7.4 TEOREMAS IMPORTANTES

Ya se ha visto que el cálculo de una integral curvilínea se reduce al de una integral simple. Obviamente, el valor de una integral curvilí nea entre dos puntos depende de la curva que une estos puntos y sobre la cual se integra; es decir depende del camino de integración. Sin embargo, en algunos casos el valor de la integral curvilínea es independiente del camino de integración. Si la curva es cerrada, la inegral curvilínea en algunos casos puede expresarse como una integral doble.

Para precisar lo anterior llamaremos curva simple cerrada a una curva cerrada que no se corta a sí misma en ningún punto. También diremos que una región plana es simplemente conexa si toda curva cerrada de la región se puede contraer hasta reducirse a un punto sin salir de la región, si no, diremos que la región es multiplemente conexa. Intuitivamente una región es simplemente conexa s no tiene "huecos" y es multiplemente conexa si lo tiene.

Por otra parte, si al correr una curva cerrada $C$ del plano $xy$ con la cabeza dirigida hacia el eje positivo $z$, la región encerrada por la curva queda a la izquierda, entonces se dice que se la recorre en sentido positivo. Para una curva simple cerrada del plano, el sentido positivo coincide con el sentido contrario al de las agujas del reloj. Notemos que la región encerrada por una curva simple cerrada es simplemente conexa.

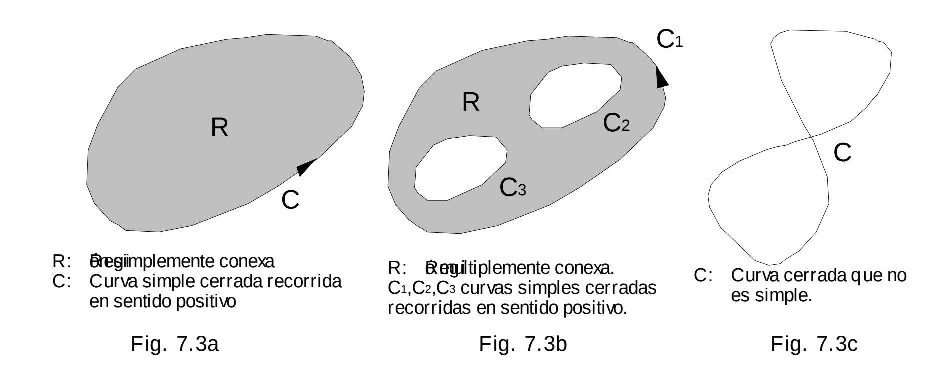



Fig. 7.3a Fig. 7.3b Fig. 7.3c

**Notación**. La integral curvilínea a lo largo de una curva cerrada descrita en sentido positivo se acostumbra simbolizar por $\oint$.

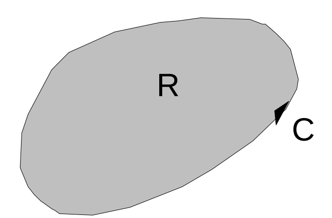
## 7.5 EL TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO

Naturalmente uno podría esperar que lo que ocurre en una región influya sobre su contorno y viceversa; este teorema establece una relación en este sentido entre una integral doble sobre una región plana y una integral curvilínea a lo largo del contorno de la región.

Consideremos una curva simple cerrada $C$ y la región $R$ que encierra (figura 7.4a), entonces se cumple

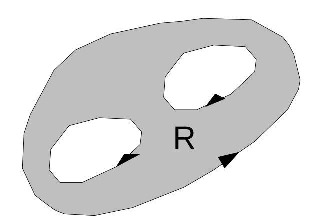
$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \tag{7.8}$$

Por supuesto, en (7) las funciones $P$, $Q$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ han de ser continuas en la región (ejercicio 14). Además, el teorema de Green en el plano dado por (7) es también válido para regiones limitadas por más de una curva (es decir, regiones multiplemente conexas) como el de la figura 7.4b (ejercicio 13).




Región simplemente conexa donde se cumple el teorema de Green

Fig. 7.4a




Región multiplemente conexa donde se cumple el teorema de Green

Fig. 7.4b

**Example 64** *Aplicando el teorema de Green, calcular*

$$\oint_c x^2ydx - xy^2dy$$

*donde $C$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.*
*Con $P = x^2y$, $Q = -xy^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -y^2$; y si $R$ es la región encerrada*

*por C (figura 7.5), tenemos*

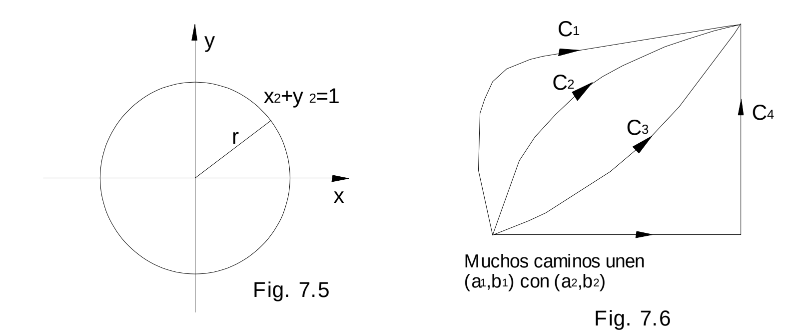



Fig. 7.5

Fig. 7.6

$$\oint_c x^2ydx - xy^2dy = \iint_R \left(-y^2 - x^2\right) dxdy = -\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 r dr d\theta = -\int_0^2 \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 d\theta = -\frac{\pi}{2}$$

*(para calcular la integral doble se ha pasado a coordenadas polares).*

## 7.6 AREA ENCERRADA POR UNA CURVA

El área encerrada por una curva simple cerrada está dada por

$$A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

Esta fórmula se deduce inmediatamente del teorema de Green en el plano (ejercciio 15) yes muy útil para calcular el área de regiones limitadas por curvas dadas paramétricamente (ejercicio 16 y 17).

## 7.7 INDEPENDENCIA DEL CAMINO DE INTEGRACIÓN

Aunque en general el valor de la integral curvilínea entre dos puntos $(a_1, b_1)$ y $(a_2, b_2)$,

$$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} Pdx + Qdy \tag{7.9}$$

depende del camino de integración $C$ que une ambos puntos (figura. 7.6); cuando se cumple

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{7.10}$$

el valor de la integral curvilínea (9) es independiente del camino de integración (Ejercicio 23).

Por tanto, si se cumple (10) podemos calcular la integral curvilínea (9) integrando a lo largo de cualquier camino $C$ que una los puntos $(a_1, b_1)$ y $(a_2, b_2)$. Por supuesto, siempre elegiremos el camino que simplifique los cálculos.

Por otra parte, si se cumple (10) entonces $Pdx + Qdy$ es una diferencial exacta; es decir existe una función $\phi(x, y)$ tal que $d\phi = Pdx + Qdy$. Teniendo en cuenta que

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$$

se puede calcular la función $\phi(x, y)$. Una vez determinada la función $\phi(x, y)$, la integral curvilínea (9) se calcula fácilmente según

$$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} Pdx + Qdy = \int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} d\phi = \phi(x, y)\Big|_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} = \phi(a_2, b_2) - \phi(a_1, b_1) \tag{7.11}$$

Ahora, si la integral curvilínea es independiente del camino entonces su valor a lo largo de una curva cerrada $C$ es decor. Es decir,

$$\oint_C Pdx + Qdy = 0, \text{ si } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{7.12}$$

**Example 65** *Calcular* $\oint_C 2xydx + x^2dy$ *si* $C$ *es la circunferencia* $x^2 + y^2 = 4$.

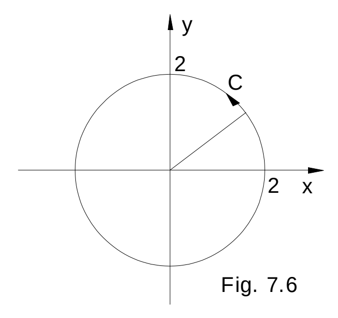


Fig. 7.6

*Con* $P = 2xy$, $Q = x^2$ *tenemos* $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x = \frac{\partial P}{\partial y}$. *Por tanto la integral curvilínea*

*a lo largo de la circunferencia vale cero. Es decir,*

$$\oint_C 2xydx + x^2dy = 0$$

Por supuesto, las integrales curvilíneas en el espacio tienen propiedades similares. Por ejemplo, la integral curvilínea

$$\int_{(a_1,b_1,c_1)}^{(a_2,b_2,c_2)} Pdx + Qdy + Rdz \tag{7.13}$$

es independiente del camino que une los puntos $(a_1, b_1, c_1)$ y $(a_2, b_2, c_2)$ si se cumple

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \tag{7.14}$$

**Nota**. Se puede demostrar que (10) no solamente es condición suficiente para que la integral curvilínea (9) sea independiente del camino, sino que también es una condición necesaria. Similarmente (14) es condición necesaria y suficiente para que (13) sea independiente del camino

**Resumen**. El siguiente diagrama resume esquemáticamente lo anterior y muestra cómo debe calcularse la integral curvilínea $\int_C Pdx + Qdy$ según la curva de integración $C$ sea cerrada o no, y según sea $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ o no:

$$\int_C Pdx + Qdy \overset{C \text{ no cerrada}}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} & \Rightarrow \text{Independiente del camino; entonces se calcula directamente eligiendo previamente un camino de integración adecuado.} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y} & \Rightarrow \text{Se calcula directamente pasando a una integral simple.} \end{cases}$$

$$\oint_C Pdx + Qdy \overset{C \text{ cerrada}}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} & \Rightarrow \text{no es necesario calcular nada, pues en este caso } \oint_C Pdx + Qdy = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y} & \Rightarrow \text{Se calcular indirectamente pasando a una integral doble:} \\ & \oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \end{cases}$$

## 7.8 INTEGRALES DE SUPERFICIE

Vamos a definir la integral de superficie de una función $\phi(x, y, z)$ sobre una superficie $S$.

Dividamos $S$ en $n$ pedazos de área $S_i$ y elijamos de cada uno de ellos un punto cualquiera $(x_i, y_i, z_i)$ (figura 7.7). Evaluamos $\phi$ en cada uno de tales puntos.

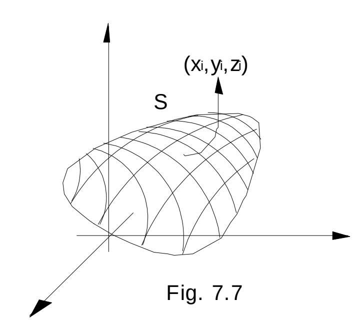



Fig. 7.7

Ahora, formemos la suma

$$S_n = \phi(x_1, y_1, z_1) S_1 + \phi(x_2, y_2, z_2) S_2 + ... + \phi(x_n, y_n, z_n) S_n$$

Si el límite de la suma $S_n$ existe, cuando el número de pedazos aumenta (es decir, $n \to \infty$) y todos los pedazos son cada vez más pequeños (es decir, $\max S_i \to 0$); a tal límite se llama la integral de superficie de $\phi(x, y, z)$ sobre $S$ y se representa por

$$\iint_S \phi(x, y, z)\, dS.$$

Es decir,

$$\iint_S \phi(x, y, z)\, dS = \lim_{n \to \infty} [\phi(x_1, y_1, z_1) S_1 + \phi(x_n, y_n, z_n) S_n] \qquad (7.15)$$

### 7.8.1 Cálculo de la integral de superficie

Tal como el cálculo de una integral curvilínea se reduce al cálculo de una integral simple; el cálculo de una integral de superficie se reduce al cálculo de una integral doble:

Si la ecuación de la superficie $S$ está dada implícitamente por $F(x, y, z) = C$, $C$ constante, entonces

$$\iint_S \phi(x, y, z)\, dS = \iint_A \phi(x, y, z) \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} dxdy \qquad (7.16)$$

donde $A$ es la proyección de $S$ en el plano $xy$.

Si la ecuación de la superficie $S$ está dada explícitamente por $z = f(x, y)$, la fórmula (16) se reduce a

$$\iint_S \phi(x, y, z)\, dS = \iint_A \phi(x, y, z) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy \tag{7.17}$$

En algunos casos concretos no es conveniente (o no se puede) proyectar sobre el plano $xy$ y se debe proyectar entonces sobre el plano $xz$ o sobre el plano $zy$, en tales casos el denominador de (16) se cambia por $|F_y|$ o por $|F_x|$, respectivamente. Análogamente en la fórmula (17) se deben efectuar los cambios correspondientemente (ejercicio 25).

Notemos que si la superficie $S$ es un plano paralelo a uno de los planos coordenados, la integral de superficie (16) ó (17), de la función $\phi(x, y, z)$ se reduce simplemente a la integral doble de dicha función.

## 7.9 AREA DE UNA SUPERFICIE

Si en (15) hacemos $\phi(x, y, z) = 1$, tenemos

$$\iint_S dS = \lim_{n \to \infty} (S_1 + S_2 + ... + S_n) \tag{7.18}$$

que da el área de $S$.

Por tanto, si la ecuación de la superficie $S$ está dada implícitamente por $F(x, y, z) = C$, el área de $S$ se calcula por

$$\text{área de } S = \iint_A \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} dxdy \tag{7.19}$$

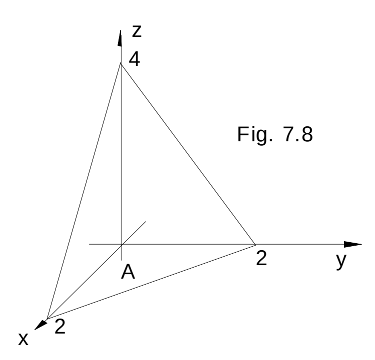
donde $A$ es la proyección de $S$ sobre el plano $xy$.

Si la ecuación de la superficie $S$ está dada explícitamente por $z = f(x, y)$ el área de $S$ se calcular por

$$\text{área de } S = \iint_A \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy \tag{7.20}$$

**Example 66** *Calcular el área de la porción que está en el primer octante, del*

*plano* $z = 4 - 2x - 2y$.




*La proyección sobre el plano* $xy$ *es el triángulo* $A$ *limitado por* $x = 0$, $y = 0$ *y la recta* $z + y = 2$. *Por tanto, integrando sobre* $A$ *tenemos*

$$\begin{aligned} \text{área de } S &= \iint_A \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy \\ &= \int_0^2 \int_0^{2-y} \sqrt{1 + (-2)^2 + (-2)^2}\,dxdy = 3\int_0^2 (2-y)\,dy \\ &= -\frac{3}{2}(2-y)^2\Big|_0^2 = 6 \end{aligned}$$

## 7.10 TEOREMAS INTEGRALES

Los teoremas integrales relacionan integrales dobles, triples, curvilíneas y de superficie. Su formulación se abrevia y su uso para aplicaciones concretas se simplifica con la notación vectorial.

## 7.11 GRADIENTE, DIVERGENCIA, ROTACIONAL

El operador nabla $\nabla$, está definido por

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{7.21}$$

y puede aplicarse a funciones $f(x, y, z)$ de la siguiente manera:

1. Si $f(x, y, z)$ es una función en $R^3$ en $R$, tenemos

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \tag{7.22}$$

   que es el conocido **gradiente de** $f$.

2. Si $F(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$ es una función de $R^3$ en $R^3$, por una parte tenemos

$$\nabla \circ F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \tag{7.23}$$

que se llama **divergencia de** $F$.

3. Por otra parte, también tenemos

$$\nabla \times f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \quad (24)$$

que se denomina **rotacional de** $f$.

Notemos que el rotacional de $F$, $\nabla \times F$, está definido por el último miembro de (24) y el determinante es simplemente una ayuda nemotécnia para recordarlo fácilmente.

Recordando que $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$, la función $F(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$ se escribe también como $F(x, y, z) = F_1 i + F_2 j + F_3 k$.

**Example 67** *Si* $F = x^2 yi + 2yzj + \left(x + z^2\right) k$, *entonces*

$$\nabla \circ F = 2xy - 2z + 2z = 2xy$$

*divergencia de F*

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & -2yz & x + z^2 \end{vmatrix} = (0 + 2y)\, i + (1 - 0)\, j + \left(0 - x^2\right) k \\ &= 2yi - j - x^2 k \end{aligned}$$

*rotacional de F.*

## 7.12 TEOREMA DE STOKES

Consideremos una superficie $S$ abierta, de dos lados, y cuyo contorno sea una curva cerrada simple $C$ como en la figura 7.9. Entonces

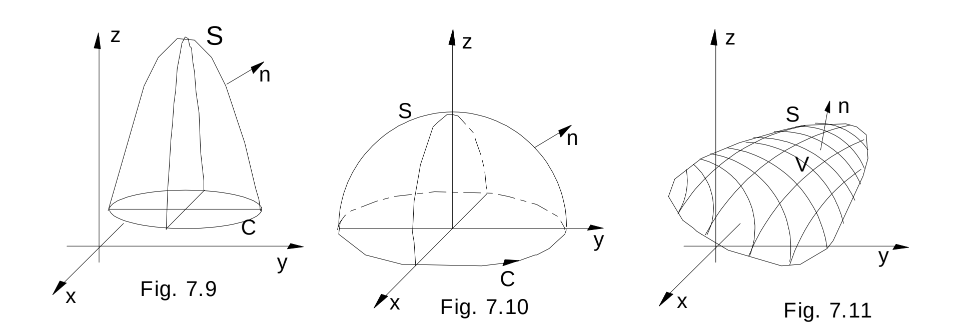


Fig. 7.9 Fig. 7.10 Fig. 7.11

$$\iint_S (\nabla \times F) \circ n dS = \oint_C F \circ dr \tag{7.24}$$

donde $C$ se recorre de tal modo que si un observador la recorre con su cabeza dirigida en el sentido de la normal unitaria $n$, la superficie $S$ queda a la izquierda.

Por supuesto, tanto $F$ como las derivadas parciales deben ser continuas en $S$.

El teorema de Stokes, dado por (26), dice que la integral curvilínea de la componente tangencial alrededor de una curva cerrada $C$ es igual sobre toda superficie $S$ que tenga por contorno a $C$.

En la práctica, se comienza fijando el sentido de la normal $n$ y se determina el sentido de $C$ en referencia a tal sentido.

**Example 68** *Calcular*

$$\iint_S (\nabla \times F) \circ n dS$$

*si $F = 2yi + 3xj - z^2k$ y $S$ es la parte superior de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.*
*Aplicando el teorema de Stokes, en lugar de calcular la integral de superficie dada podemos calcular una integral curvilínea a lo largo del contorno de la superficie dada (figura 7.10). El contorno de la superficie $S$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$ sobre el plano $xy$. Por tanto*

$$\iint_S (\nabla \times F) \circ n dS = \oint_C F \circ d\vec{r} = \oint 2ydx + 3xdy - z^2 dz \quad (1)$$

*pero, como $z = 0$ en la curva $C$, (1) se reduce a*

$$\iint_S (\nabla \times F) \circ n dS = \oint_C 2ydx + 2xdy \quad (2)$$

*para calcular (2) aplicamos el teorema de Green en el plano teniendo en cuenta que la región $R$ encerrada por $x^2+y^2=1$ es un círculo de radio 1:*

$$\begin{aligned}\iint_S (\nabla\times F)\circ ndS &= \oint_C 2ydx+3xdy=\iint_R (3-2)\,dxdy=\iint_R dxdy\\ &= \text{(área del círculo de radio uno)}=\pi\end{aligned}$$

## 7.13 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA (O DE GAUSS)

Consideremos una región sólida $V$ limitada por la superficie $S$. Entonces

$$\iiint_V \nabla\circ FdV=\iint_S F\circ ndS \tag{7.25}$$

donde la normal $n$ está dirigida al exterior de $V$ (figura 7.11).

Por supuesto, tanto $F$ como las derivadas parciales que intervienen en (##) deben ser contínuas en la región $V$.

El Teorema de la Divergencia, dada por (##), dice que la integral de superficie de la componente normal es igual a la integral triple de la divergencia sobre la región encerrada por la superficie.

**Example 69** *Calcular* $\iint_S F\circ ndS$, *donde* $F=(2x+3z)\,\hat{\imath}-(xz+y)\,\hat{\jmath}+\left(y^2+2z\right)\hat{k}$ *y* $S$ *es la superficie esférica* $x^2+y^2+z^2=1$.
*Aplicando el teorema de la Divergencia, en lugar de la integral de superficie dada podemos calcular una integral triple. Como la región $V$ encerrada por $x^2+y^2+z^2=1$ es una esfera de radio uno, tenemos*

$$\begin{aligned}\iint_S F\circ ndS &= \iiint_V \nabla\circ FdV=\iiint_V (2-1+2)\,dV=3\iiint_V dV\\ &= 3\,(\text{volumen de la esfera de radio uno})=3\left(\frac{4}{3}\pi\right)=4\pi\end{aligned}$$

## 7.14 EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcular $\int_{(0,0)}^{(1,2)} \left(x^2 - y\right) dx + \left(x + y^2\right) dy$ a lo largo de la recta que une $(0,0)$ con $(1,2)$.

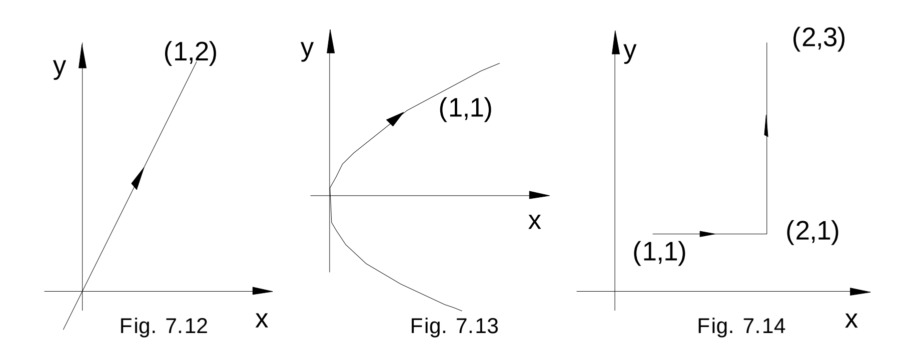



Fig. 7.12 Fig. 7.13 Fig. 7.14

Solución. Como la ecuación de la recta que une $(0,0)$ con $(1,2)$ es $y = 2x$, expresamos la integral curvilínea como una integral simple en función de $x$; reemplazar $y = 2x$, $dy = 2dx$, límites $(0,0) = (1,2)$, entonces $x = 0$ a $x = 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(1,2)} \left(x^2 - y\right) dx + \left(x + y^2 dy\right) &= \int_0^1 \left(x^2 - 2x\right) dx + \left(x + 4x^2\right) 2dx \\ &= \int_0^1 9x^2 dx = 9\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 3 \end{aligned}$$

2. Calcular $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x + y)\, dx + x^2 dy$ a lo largo de la parábola $x = y^2$ entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.
Solución. Primeramente expresamos la integral curvilínea como una integral simple en función de $y$; reemplazar $x = y^2$, $dx = 2ydy$, límites $(0,0)$ a $(1,1)$ entonces $y = 0$ a $y = 1$. Por tanto

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x + y)\, dx + x^2 dy &= \int_0^1 \left(y^2 + y\right) 2ydy + y^4 dy = \int_0^1 \left(y^4 + 2y^3 + 2y^2\right) dy \\ &= \frac{y^5}{5} + \frac{2y^4}{4} + \frac{2y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{41}{30} \end{aligned}$$

3. Calcular $\int_{(1,1)}^{(2,3)} (x + 2y)\, dx + xydy$ a lo largo de la recta de $(1,1)$ a $(2,1)$ y luego de $(2,1)$ a $(2,3)$.

Solución. La integral curvilínea pedida es la suma de las integrales curvilíneas primero a lo largo de la recta $y = 1$ que une $(1, 1)$ con $(2, 1)$, y luego a lo largo de la recta $x = 2$ que une $(2, 1)$ con $(2, 3)$ (figura 7.14).
Para la integral curvilínea a lo largo de $y = 1$ desde $(1, 1)$ a $(2, 1)$, reemplazar: $y = 1$, $dy = 0$, límites: $(1, 1)$ a $(2, 1)$, entonces $x = 1$ a $x = 2$, entonces

$$\int_{(1,1)}^{(2,1)} (x + 2y)\, dx + xydy = \int_1^2 (x + 2)\, dx = \left. \frac{x^2}{2} + 2x \right|_1^2 = \frac{7}{2}$$

Para la integral curvilínea a lo largo de $x = 2$ desde $(2, 1)$ a $(2, 3)$, reemplazar: $x = 2$, $dx = 0$. Límites> $(2, 1)$ a $(2, 3) \Rightarrow y = 1$ a $y = 3$, entonces

$$\int_{(2,1)}^{(2,3)} (x + 2y)\, dx + xydy = \int_1^3 2ydy = y^2\Big|_1^3 = 8$$

Por tanto, la integral pedida es

$$\int_{(2,1)}^{(2,3)} (x + 2y)\, dx + xydy = \frac{7}{2} + 8 = \frac{23}{2}$$

**Nota**. Notemos que el cálculo a lo largo de rectas horizontales o verticales, en general es más sencillo que a lo largo de otras curvas; por eso, si debemos elegir el camino de integración en general elegimos un camino constituido por tramos horizontales y tramos verticales.

4. Calcular $\displaystyle\int_C \left(x^2 + 2xy\right) dx + \left(x^2 - y\right) dy$, donde $C$ está dada paramétricamente por $x = 2t$, $y = t^3$ y $t$ varía desde $t = 0$ hasta $t = 2$.

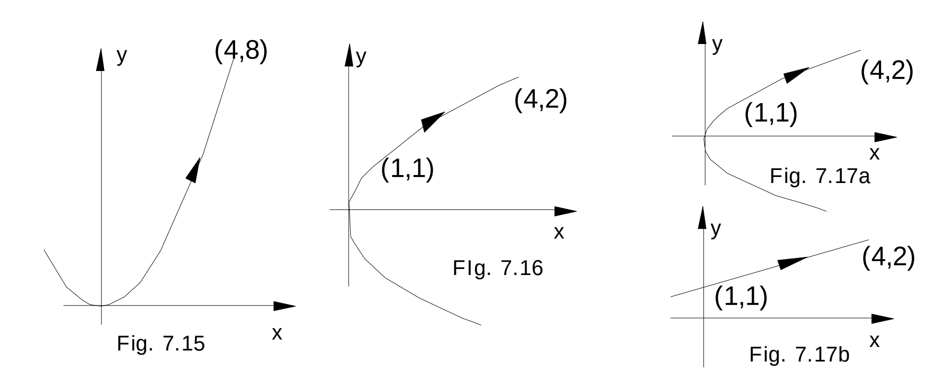


Fig. 7.15 FIg. 7.16 Fig. 7.17a Fig. 7.17b

Solución. Expresemos la integral curvilínea como una integral simple en función de $t$, reemplazar: $x = 2t$, $y = t^3$, $dx = 2dt$, $dy = 3t^2dt$. Límites:

$t = 0$ a $t = 2$. Por tanto

$$\begin{aligned}\int_C \left(x^2 + 2xy\right) dx + \left(x^2 - y\right) dy &= \int_0^2 \left(4t^2 + 4t^4\right) 2dt + \left(4t^2 - t^3\right) 3t^2 dt \\ &= \int_0^2 \left(8t^2 + 20t^4 - 3t^5\right) dt = \frac{8}{3}t^3 + 4t^5 - \frac{3}{6}t^6\bigg|_0^2 = \frac{352}{3}\end{aligned}$$

5. Calcular $\int_C \left(y - x^2\right) dx + \left(2xy + y^2\right) dy$, donde $C$ está dada por $x = 1 - \cos 2t$, $y = \sin t$ desde $(0,0)$ hasta $(2,1)$.
Solución. Expresamos la integral curvilínea como una integral simple en función de $t$, reemplazar:

$$\begin{aligned} x = 1 - \cos 2t &\Rightarrow dx = 2\sin 2t dt \\ y = \sin t &\Rightarrow dy = \cos t dt \end{aligned}$$

Límites: $(1 - \cos 2t, \sin t) = (0,0)$ a $(1 - \cos 2t, \sin t) = (2,1)$ entonces, desde $t = 0$ a $t = \pi/2$. Por tanto

$$\begin{aligned}\int_C \left(y - x^2\right) dx + \left(2xy + y^2\right) dy &= \int_0^{\pi/2} \left(\sin t - (1 - \cos 2t)^2\right) 2\sin 2t dt + \\ &+ \left(2\left(1 - \cos 2t\right)\sin t + \sin^2 t\right)\cos t dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\sin t - 4\sin^4 t\right) 4\sin t\cos t dt + \left(4\sin^3 t + \sin^2 t\right)\cos t dt\end{aligned}$$

con $\sin^2 t = \dfrac{1 - \cos 2t}{2}$,

$$= \int_0^{\pi/2} \left(5\sin^2 t + 4\sin^3 t - 16\sin^5 t\right)\cos t dt = 5\frac{\sin^3 t}{3} + \frac{4\sin^4 t}{4} - 16\frac{\sin^6 t}{6}\bigg|_0^{\pi/2} = 2$$

**Nota**. El cálculo se simplifica un poco si desde el principio hacemos $x = 1 - \cos 2t = 2\sin^2 t$.

6. Calcular $\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x + y)\, dx + (y - x)\, dy$ a lo largo a) de la parábola $y^2 = x$, b) de la recta, c) de los segmentos $(1,1)$ a $(1,2)$ y de $(1,2)$ a $(4,2)$, d) de la curva $x = 2t^2 + t + 1$, $y = t^2 + 1$.
Solución a) Teniendo en cuenta que $y$ varía desde $y = 1$ hasta $y = 2$, expresamos la integral curvilínea como una integral simple en función de $y$:

$$\begin{aligned}\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x + y)\, dx + (y - x)\, dy &= \int_1^2 \left(y^2 + y\right) 2y dy + \left(y - y^2\right) dy \\ &= \int_1^2 \left(2y^3 + y^2 + y\right) dy = \frac{2y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\bigg|_1^2 = \frac{34}{3}\end{aligned}$$

b) Como la recta que une $(1,1)$ con $(4,2)$ es $x = 3y - 2$, expresamos la integral curvilínea como una integral simple en función de $y$;

$$\begin{aligned}\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y)\,dx + (y-x)\,dy &= \int_1^2 (3y-2+y)\,3dy + (y-3y+2)\,dy \\ &= \left.\frac{10}{2}y^2 - 4y\right|_1^2 = 11\end{aligned}$$

c) Integraremos como tramos. Al integrar a lo largo de la recta $x = 1$ a que va de $(1,1)$ a $(1,2)$ tenemos:

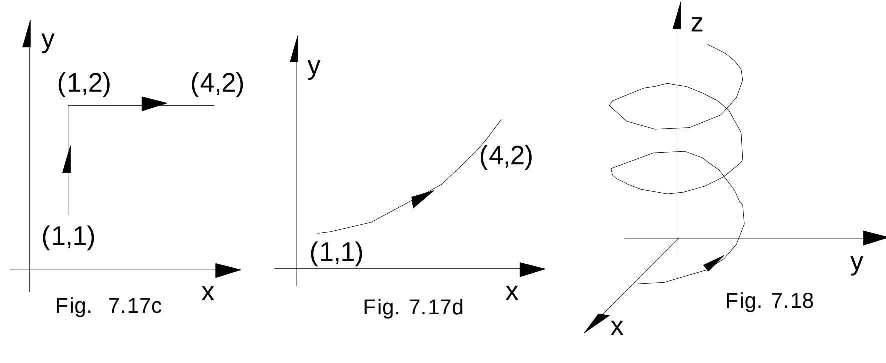


Fig. 7.17c Fig. 7.17d Fig. 7.18

$$\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y)\,dx + (y-x)\,dy = \int_1^2 0 + (y-1)\,dy = \left.\frac{y^2}{2} - y\right|_1^2 = \frac{1}{2}$$

Al integrar a lo largo de la recta $y = 2$ que va de $(1,2)$ a $(4,2)$ tenemos

$$\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y)\,dx + (y-x)\,dy = \int_1^4 (x+2)\,dx + 0 = \left.\frac{y^2}{2} + 2x\right|_1^4 = \frac{27}{2}$$

Por tanto, la integral pedida es

$$\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y)\,dx + (y-x)\,dy = \frac{1}{2} + \frac{27}{2} = 14$$

d) Teniendo en cuenta que $x = 2t^2 + t + 1$, $y = t^2 + 1$, $dx = (4t+1)\,dt$, $dy = 2tdt$; además de $\left(2t^2 + t + 1, t^2 + 1\right) = (1,1)$ se obtiene $t = 0$ y de $\left(2t^2 + t + 1, t^2 + 1\right) = (4,2)$ se obtiene $t = 1$:

$$\begin{aligned}\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y)\,dx + (y-x)\,dy &= \int_0^1 \left(2t^2 + t + 1 + t^2 + 1\right)(4t+1)\,dt \\ &\quad + \left(t^2 + 1 - 2t^2 - t - 1\right) 2tdt \\ &= \int_0^1 \left(10t^3 + 5t^2 + 9t + 2\right) dt \\ &= \left.\frac{10t^4}{4} + \frac{5t^3}{3} + \frac{9t^2}{2} + 2t\right|_0^1 = \frac{32}{3}\end{aligned}$$

**Nota**. Este ejercicio muestra que el valor de la integral curvilínea en general depende del cambio de integración.

7. Calcular $\int_C (1+x)\,dx - xydy + (y+z)\,dz$, siendo $C$ la hélice $x = \cos \pi t$, $y = \sin \pi t$, $z = t$, desde $(1,0,0)$ hasta $\left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$.
Solución. Para pasar a una integral simple en función de la variable $t$, notemos que de

$$(\cos \pi t, \sin t, t) = (1,0,0) \text{ obtenemos } t = 0$$

y de

$$(\cos \pi t, \sin t, t) = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right) \text{ obtenemos } t = \frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_C (1+x)\,dx - xydy + (y+z)\,dz &= \int_0^{1/2} (1+\cos \pi t)\,(-\pi \sin \pi t)\,dt - \\
&\quad - \cos \pi t \cdot \sin \pi t \cdot \pi \cdot \cos \pi t dt + (\sin \pi t + t)\,dt \\
&= \int_0^{1/2} \left(-\pi \sin \pi t - \sin \pi t \cos \pi t - \cos^2 \pi t \sin \pi t + \sin \pi t + t\right) \\
&= \cos \pi t - \frac{\sin^2 \pi t}{2} + \frac{\cos^3 \pi t}{3} - \frac{\cos \pi t}{\pi} + \frac{t^2}{2}\Big|_0^{1/2} \\
&= -\frac{41}{24} + \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

**TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO**

8. Comprobar el teorema de Green en el plano para

$$\oint_C \left(2xy - x^2\right) dx + \left(x + y^2 dy\right)$$

siendo $C$ la curva cerrada que limita la región $R$ entre $y = x^2$, $y = x$.

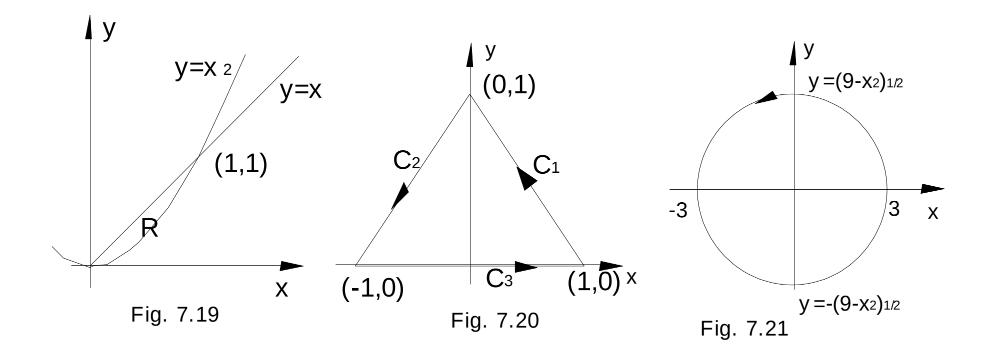



Fig. 7.19 Fig. 7.20 Fig. 7.21

Solución. Con $P = 2xy - x^2$, $Q = x + y^2$ tenemos $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x$; entonces debemos comprobar que

$$\oint_C \left(2xy - x^2\right) dx + \left(x + y^2 dy\right) dy = \iint_R (1 - 2x)\, dxdy \quad (1)$$

Por una parte, integrando primero a lo largo de la parábola $y = x^2$ y luego a lo largo de la recta $y = x$ (figura 7.19) tenemos:

$$\begin{aligned}\oint_C \left(2xy - x^2\right) dx + \left(x + y^2 dy\right) dy &= \int_0^1 \left(2x^3 - x^2\right) dx + \left(x + x^4\right) 2xdx + \\ &\quad \int_1^0 \left(2x^2 - x^2\right) dx + \left(x + x^2\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(2x^5 + 2x^3 + x^2\right) dx + \int_1^0 \left(2x^2 + x\right) dx \\ &= \left.\frac{2x^6}{6} + \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right|_1^0 = 0 \quad (2)\end{aligned}$$

Por otra parte, integrando sobre la región $R$ tenemos:

$$\begin{aligned}\iint_R (1 - 2x)\, dxdy &= \int_0^1 \int_{x^2}^x (1 - 2x)\, dydx = \int_0^1 (1 - 2x) \left. y\right|_{x^2}^x dx \\ &= \int_0^1 (1 - 2x)\left(x - x^2\right) dx = \int_0^1 \left(x - 3x^2 + 2x^3\right) dx \\ &= \left.\frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^4}{4}\right|_0^1 = 0 \quad (3)\end{aligned}$$

Por tanto, (1), (2) y (3) muestran que el teorema de Green en el plano se verifica.

9. Comprobar el teorema de Green en el plano para

$$\oint_C (2x - y)\, dx + (x - 2y)\, dy$$

siendo $C$ el triángulo de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$.
Solución. Con $P = 2x - y$, $Q = x - 2y$ tenemos $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$. Entonces debemos comprobar

$$\oint_C (2x - y)\, dx + (x - 2y)\, dy = \iint_R (1 + 1)\, dxdy = 2 \iint_R dxdy \quad (1)$$

donde $R$ es la región encerrada por $C$. Por una parte, integrando por

tramos a lo largo de la curva $C$ (figura 7.20) tenemos:

$$\begin{aligned}\int_{C_1}(2x-y)\,dx+(x-2y)\,dy &= \int_0^1 (2\,(1-y)-y)\,(-dy)+(1-y-2y)\,dy \quad \text{(Por ser } C_1 : x+y\\ &= -\int_0^1 dy = -y|_0^1 = -1 \quad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{C_2}(2x-y)\,dx+(x-2y)\,dy &= \int_0^{-1} (2x-x-1)\,dx+(x-2\,(x+1))\,dy \quad \text{(Por ser } C_2 : y=x\\ &= -3\int_0^{-1} dx = -3x|_0^{-1} = 3 \quad (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{C_3}(2x-y)\,dx+(x-2y)\,dy &= \int_{-1}^1 (2x-0)\,dx+0 \quad \text{(por ser } C_3 : y=0)\\ &= \left.\frac{2x^2}{2}\right|_{-1}^1 = 0 \quad (4)\end{aligned}$$

Por tanto, sumando (2), (3) y (4) obtenemos

$$\int_C (2x-y)\,dx+(x-2y)\,dy-1+3+0=2 \quad (5)$$

Por otra parte, integrando sbre el triángulo $R$ tenemos:

$$\begin{aligned}2\iint_R dxdy &= 2\int_0^1\int_{y-1}^{-y+1} dxdy = 2\int_0^1 (-y+1-y+1)\,dy\\ &= 2\left(-\frac{y^2}{2}+2y\right)\Big|_0^1 = 2 \quad (6)\end{aligned}$$

Luego, (5) y (6) muestran que el teorema de Green en el plan se verifica.

10. Comprobar el teorema de Green en el plano para

$$\oint_C \left(x^3-x^2y\right)dx+xy^2dy$$

siendo $C$ la circunferencia $x^2+y^2=9$.
Solución. Con $P=x^3-x^2y$, $Q=xy^2$ tenemos $\frac{\partial Q}{\partial x}=y^2$, $\frac{\partial P}{\partial y}=-x^2$.
Entonces debemos comprobar

$$\oint_C \left(x^3-x^2y\right)dx+xy^2dy=\iint_R \left(y^2+x^2\right)dxdy \quad (1)$$

donde $R$ es la región encerrada por $C$.
Por una parte, integrando a lo largo de la circunferencia, primero integramos a lo largo de la semicircunferencia superior $y = \sqrt{9-x^2}$ y luego a lo largo de la semicircunferencia inferior $y = -\sqrt{9-x^2}$, tenemos

$$\begin{aligned}\oint_C \left(x^3 - x^2 y\right) dx + xy^2 dy &= \int_3^{-3} \left(x^3 - x^2\sqrt{9-x^2}\right) dx + x\left(9-x^2\right)\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} dx + \\ &\quad + \int_3^{-3} \left(x^3 - 2x^2\sqrt{9-x^2}\right) dx + \int_{-3}^{3} \left(x^3 + 2x^2\sqrt{9-x^2}\right) dx \\ &= \int_{-3}^{3} 4x^2\sqrt{9-x^2} dx \\ &= \frac{1}{2}\left(-x\left(9-x^2\right)^{3/2} - x^3\left(9-x^2\right)^{1/2} + 81 \arcsin\frac{x}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3} = \frac{81}{2}\pi\end{aligned}$$

Por otra parte, integrando sobre el círculo encerrado por la circunferencia (pasando a coordenadas polares) tenemos

$$\iint_R \left(y^2 + x^2\right) dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^3 d\theta = \frac{81}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{81}{2}\pi$$

11. Calcular

$$\oint_C y \sin \pi x \, dx + y \cos \pi x \, dy$$

si $C$ es el contorno del rectángulo de vértices $(1,-1)$, $(1,1)$, $(2,-1)$, $(2,1)$.

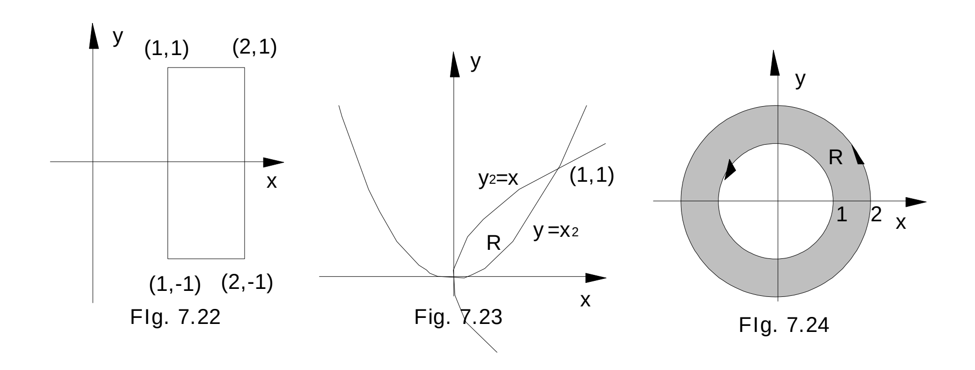


FIg. 7.22 Fig. 7.23 FIg. 7.24

Solución. Con $P = y \sin \pi x$, $Q = y \cos \pi x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\pi y \sin \pi x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \sin \pi x$

y aplicando el teorema de Green tenemos:

$$\begin{aligned}
\oint_C y\sin\pi x\,dx + y\cos\pi x\,dy &= \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}(-\pi y\sin\pi x + \sin\pi x)\,dxdy \\
&= \int_{-1}^{1} y\cos\pi x + \frac{\cos\pi x}{\pi}\Big|_1^2\,dy \\
&= \int_{-1}^{1}\left(2y + \frac{2}{\pi}\right)dy = \frac{2y^2}{2} + \frac{2}{\pi}y\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{\pi}
\end{aligned}$$

12. Calcular

$$\oint_C \left(2xy - x^2\right)dx + \left(x + y^2\right)dy$$

siendo $C$ la curva cerrada que limita la región entre $y = x^2$, $y^2 = x$.
Solución.- Con $P = 2xy - x^2$, $Q = x + y^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$ y aplicando el teorema de Green en el plano tenemos:

$$\begin{aligned}
\oint_C \left(2xy - x^2\right)dx + \left(x + y^2\right)dy &= \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(1-2x)\,dydx = \int_0^1 (1-2x)\,y|_{x^2}^{\sqrt{x}}\,dx \\
&= \int_0^1\left(\sqrt{x} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3\right)dx \\
&= \frac{x^{3/2}}{3}\cdot 2 - \frac{2x^{5/2}}{5}\cdot 2 - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{30}
\end{aligned}$$

13. Calcular

$$\oint_c -x^2ydx + xy^2dy,$$

donde $C$ es el contorno de la región anular limitada por $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.
Solución. Con $P = -x^2y$, $Q = xy^2$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$ y aplicando el teorema de Green tenemos

$$\begin{aligned}
\oint_c -x^2ydx + xy^2dy &= \iint_R \left(y^2 + x^2\right)dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\Big|_1^2 d\theta = \frac{15}{4}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{15}{2}\pi
\end{aligned}$$

14. Demostrar el Teorema de Green en el plano.

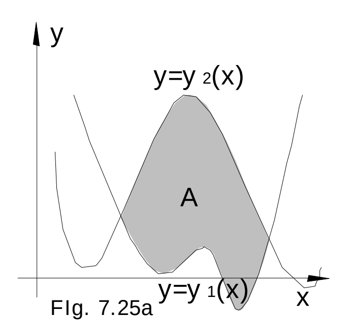


FIg. 7.25a

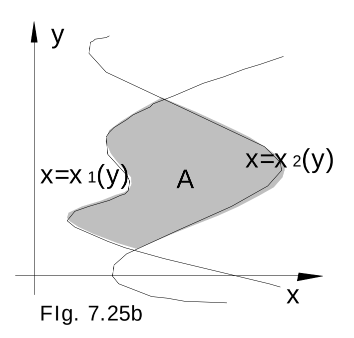


FIg. 7.25b

Solución. Primeramente consideremos una curva cerrada $C$ que sólo es cortada en dos puntos a lo más por una recta paralela a un eje de coordenadas. Entonces, sea $y = y_1(x)$ la parte de $C$ que limita inferiormente a la región $R$ y $y = y_2(x)$ la parte de $C$ que limita superiormente a $R$ (figura 7.25a). Siend $R$ la región encerrada por $C$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dydx = \int_a^b P(x,y)|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx \\
&= \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx \\
&= -\int_a^b P(x, y_1(x)) dx - \int_b^a P(x, y_2(x)) dx = -\oint P(x,y) dx \quad (1)
\end{aligned}$$

Similarmente, si $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ son las partes de $C$ que limitan a $R$ por la izquierda y por la derecha, respectivamente (figura 7.25b) tenemos:

$$\begin{aligned}
\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy &= \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_c^d Q(x,y)|_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy \\
&= \int_c^d [Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)] dy \\
&= \int_d^c Q(x_1(y), y) dy + \int_c^d Q(x_2(y), y) dy = \oint Q(x,y) dy \quad (2)
\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro (1) y (2) obtenemos el teorema de Green en el plano:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Si la curva $C$ es cortada en más de dos puntos por paralelas a los ejes coordenados, entonces mediante rectas se divide la región $R$ encerrada por

$C$ en regiones cuyo contorno es cortada en dos puntos a lo más po runa recta paralela a los ejes coordenados y se procede como antes integrand a lo largo de la curva original $C$ y las rectas auxiliares de subdivisión (que se simplificarán en el proceso).Ver figura 7.25c.

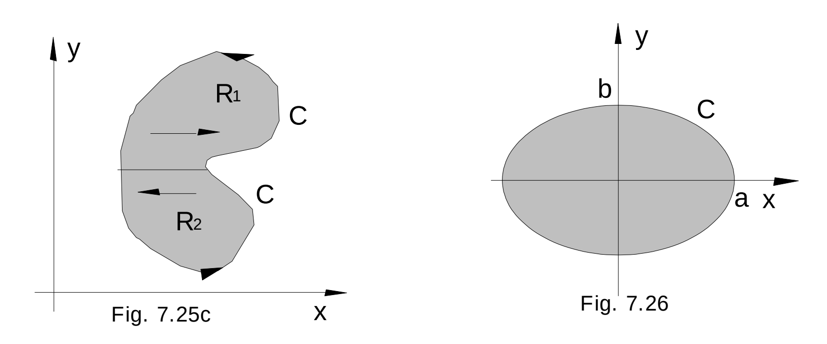


Fig. 7.25c Fig. 7.26

**AREA ENCERRADA POR UNA CURVA**

15. Mostrar que el área limitada por una curva simple cerrada $C$ está dada por

$$A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

Solución. Con $P = -y$, $Q = x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1$ y aplicando el teorema de Green tenemos

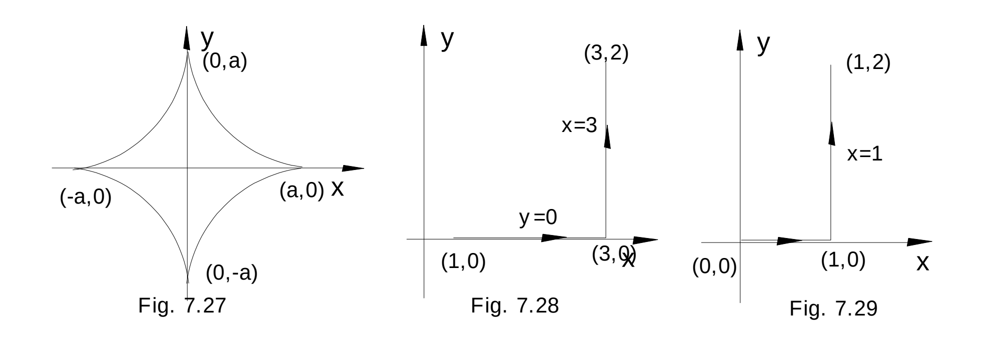
$$A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\iint_R (1+1)\,dxdy = \iint_R dxdy = \text{área de } R$$

donde $R$ es la región encerrada por $C$.

16. Hallar el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
Solución. Conviene parametrizar la elipse por medio de $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Entonces, el área pedida es

$$A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\cos^2\theta d\theta + ab\sin^2\theta d\theta = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = ab\pi$$

17. Hallar el área encerrada por la hipocicloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.




Solución. Conviene parametrizar la curva por medio de $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Por tanto, el área pedida es:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(3a^2\cos^3\theta\sin^2\theta\cos\theta - 3a^2\sin^3\theta\left(-\cos^2\theta\sin\theta\right)\right) d\theta \\
&= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} \left(\sin^2\theta\cos^4\theta + \cos^2\theta\sin^4\theta\right) d\theta = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\cos^2\theta\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) d\theta \\
&= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta \\
&= \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi} d\theta - \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}\cos 4\theta d\theta = \frac{3}{8}\pi a^2
\end{aligned}$$

**INDEPENDENCIA DEL CAMINO DE INTEGRACION**

18. a) Mostrar que

$$\int_{(1,0)}^{(3,2)} (2x-y)\,dx + (2y-x)\,dy$$

es independiente del camino que une $(1,0)$ con $(3,2)$. b) Calcular el valor de la integral.

Solución. a) Con $P = 2x - y$, $Q = 2y - x$ tenemos $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1 = \dfrac{\partial P}{\partial y}$; entonces la integral curvilínea es independiente del camino de integración.
b) Para simplificar los cálculos, integramos a lo largo del segmento de $(1,0)$ a $(3,0)$ y del segmento de $(3,0)$ a $(3,2)$. (Fig. 7.28):

$$\begin{aligned}
\int_{(1,0)}^{(3,2)} (2x-y)\,dx + (2y-x)\,dy &= \int_1^3 (2x-0)\,dx + 0 + \int_0^2 0 + (2y-3)\,dy = \\
&= \left.\frac{2x^2}{2}\right|_1^3 + \left.\frac{2y^2}{2} - 3y\right|_0^2 = 6
\end{aligned}$$

19. a) Mostrar que

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} 2xydx + \left(x^2 + 2y\right) dy$$

es independiente del camino que une $(0,0)$ con $(1,2)$. b) Calcular la integral.

Solución. a) Con $P = 2xy$, $Q = x^2 + 2y$ tenemos $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x = \dfrac{\partial P}{\partial y}$; entonces la integral curvilínea es independiente del camino de integración.
b) Para simplificar los cálculos, integramos a lo largo del segmento de $(0,0)$ a $(1,0)$ y del segmento de $(1,0)$ a $(1,2)$ (figura 7.29).

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} 2xydx+\left(x^2 + 2y\right) dy = \int_0^1 0dx+0+\int_0^2 0+(1+2y)\, dy = y + \left.\frac{2y^2}{2}\right|_0^2 = 6$$

20. Calcular

$$\int_{(1,1)}^{(3,1/3)} \left(3x^2 - y^2\right) dx - 2xydy$$

a lo largo de la hipérbola equilátera $xy = 1$.

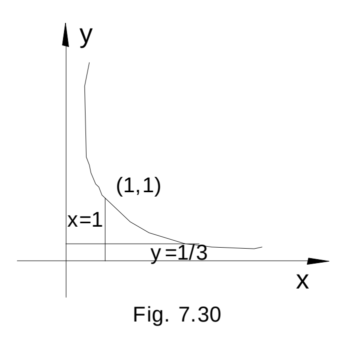
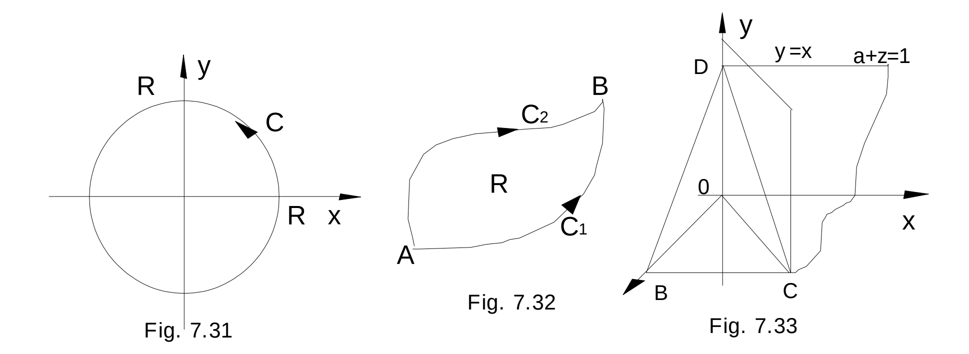


Fig. 7.30

Solución. Como con $P = 3x^2 - y^2$, $Q = -2xy$ tenemos $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2y = \dfrac{\partial P}{\partial y}$; entonces la integral es independiente del camino de integración y, por tanto, podemos elegir otro camino que no sea la hipérbola equilátera de tal modo que se simplifique el cálculo. Conviene integrar a lo largo del segmento que une $(1,1)$ con $(1,1/3)$ y $(1,1/3)$ con $(3,1/3)$ (figura 7.30).

$$\begin{aligned}\int_{(1,1)}^{(3,1/3)} \left(3x^2 - y^2\right) dx - 2xydy &= \int_1^{1/3} 0 + 2\cdot 1\cdot ydy + \int_1^3 \left(3x^2 - \frac{1}{9}\right) dx + 0 \\ &= -\left.\frac{2y^2}{2}\right|_1^{1/3} + \left.\frac{3x^3}{3} - \frac{1}{9}x\right|_1^3 = \frac{80}{3}\end{aligned}$$

21. Calcular $\oint \left(3x^2y - y^2\right) dx + \left(x^3 - 2xy\right) dy$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$.




Solución. Puesto que con $P = 3x^2y - y^2$, $Q = x^3 - 2xy$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 - 2y = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ la integral curvilínea es independiente del camino de integración. Además, como la curva $C$ (la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, figura 7.31) es cerrada, el valor de la integral curvilínea dada es cero. Es decir,

$$\oint \left(3x^2y - y^2\right) dx + \left(x^3 - 2xy\right) dy = 0$$

22. a) Mostrar que $2xy^3dx + 3x^2y^2dy$ es una diferencial exacta y hallar $\phi(x, y)$ tal que $d\phi = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$. b) Calcular $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(3,2)} 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$.

Solución. a) Puesto que con $P = 2xy^3$, $Q = 3x^2y^2$ tenemos $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 6xy^2 = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, la expresión $2xy^3dx + 3x^2y^2dy$ es una diferencial exacta. Supongamos que $\phi(x, y)$ es tal que

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy,$$

entonces

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy^3, \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2y^2 \qquad (1)$$

Integrando la primera ecuación de (1) con respecto de $x$ y considerando que la constante de integración puede ser función de $y$, tenemos:

$$\phi = \int 2xy^3dx = x^2y^3 + c(y) \qquad (2)$$

Para determinar $\phi$ resta conocer $c(y)$; derivando (2) con respecto de $y$ e igualando con la segunda ecuación de (1), tenemos:

$$3x^2y^2 + c'(y) = 3x^2y^2 \qquad (3)$$

de donde $c'(y) = 0$ y por tanto $c(y) = c$, constante. Por tanto, tomando $c = 0$: $\phi(x, y) = x^2y^3$. b)

$$\int_{(1,1)}^{(3,2)} 2xy^3dx + 3x^2y^2dy = \int_{(1,1)}^{(3,2)} d\phi = \phi(x,y)|_{(1,1)}^{(3,2)} = x^2y^3\Big|_{(1,1)}^{(3,2)} = 71$$

**Nota**. Como el integrando es una diferencial exacta, la integral curvilínea es independiente del camino de integración y puede ser calculado eligiendo un camino de integración adecuado que una $(1,1)$ con $(3,2)$.

23. Mostrar que si $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ entonces la integral curvilínea

$$\int_A^B Pdx + Qdy$$

es independiente del camino de integración que une $A$ con $B$.
Solución. Designemos por $\overline{C}$ el camino $C$ recorrido en este sentido opuesto. Es claro que

$$\int_{\overline{C}} = -\int_C$$

Consideremos dos caminos $C_1$ y $C_2$ que une $A$ con $B$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_{C_1} Pdx + Qdy - \int_{C_2} Pdx + Qdy &= \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{\overline{C}_2} Pdx + Qdy \\ &= \oint_C Pdx + Qdy\end{aligned}$$

donde $C$ es la curva cerrada $C = C_1 \cup \overline{C}_2$ (por el teorema de Green y por ser $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$)

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

por tanto,

$$\int_{C_1} Pdx + Qdy = \int_{C_2} Pdx + Qdy$$

Lo que dice que el valor de la integral curvilínea es independiente del camino de integración que une $A$ con $B$.

24. Mostrar que si $Pdx + Qdy$ es una diferencial exacta, entonces $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.
Solución. Si $Pdx+Qdy$ es una diferencial exacta, entonces hay una función $\phi(x, y)$ tal que

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$$

de donde $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = Q$. Derivando parcialmente tenemos:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

entonces

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

(suponemos que las segundas derivadas parciales son continuas)

**INTEGRALES DE SUPERFICIE**

25. Calcular $\displaystyle\iint_S xydS$ donde $S$ es la superficie del tetraedro limitado por $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$, $x = y$.

Solución. La integral de superficie pedida es igual a la suma de las integrales de superficie sobre cada una de las caras del tetraedro (figura 7.33). Cada una de estas integrales de superficie se calcula a su vez como integral doble en la región proyección sobre uno de los planos coordenados.

**Sobre la cara** $OBC$: En esta cara, donde $z = 0$, la integral de superficie coincide con la integral doble sobre la cara, entonces

$$\iint\limits_{OBC} xydS = \int_0^1\int_0^y xydxdy = \int_0^1 \frac{x^2}{2}y\Big|_0^y dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^3dy = \frac{1}{2}\left.\frac{y^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{8} \qquad (1)$$

**Sobre la cara** $OCD$: Proyectando esta cara (donde $x = y$) en el plano $xz$ obtenemos la región $OBD$; entonces integrando en esta región la correspondiente integral doble tenemos:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{OCD} xydS &= \int_0^1\int_0^{1-x} xy\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dzdx = \int_0^1\int_0^{1-x} x^2\sqrt{1+1^2+0}dzdx = \sqrt{2}\int_0^1\int_0^{1-x} x^2dzdx \\ &= \sqrt{2}\int_0^1 x^2\left(1-x\right)dx = \frac{\sqrt{2}}{12} \qquad (12)\end{aligned}$$

**Sobre la cara** $OBD$: En esta cara, donde $y = 0$, la integral de superficie coincide con la integral doble sobre la cara; sin embargo, ya no es necesario calcular nada puesto que al ser $y = 0$ el integrando se hace cero y, por tanto:

$$\iint\limits_{OBD} xy\,dS = \iint\limits_{OBD} 0dS = 0 \qquad (3)$$

**Sobre la cara** $BCB$: Proyectando esta cara (donde $x + z = 1$) en el plano $xy$ obtenemos la región $OBC$, entonces integrando en esta región la correspondiente integral doble tenemos:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{BCD} xy\,dS &= \int_0^1\int_0^y xy\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy = \int_0^1\int_0^y xy\sqrt{1+1^2+0}dxdy = \sqrt{2}\int_0^1\int_0^y xydxdy \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \qquad \text{(de (1))} \qquad (4)\end{aligned}$$

Por tanto, sumando las integrales de superficie sobre cada una de las caras obtenemos

$$\iint_S xy\,dS = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{12} + 0 + \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{3+5\sqrt{2}}{24}$$

26. Evaluar $\displaystyle\iint_S z\,dS$, donde $S$ es la semiesfera superior de radio $a$, $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

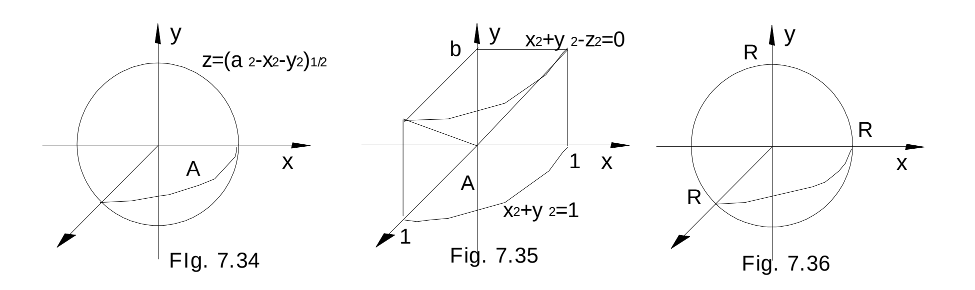


FIg. 7.34 Fig. 7.35 Fig. 7.36

Solución. Proyectando la superficie $S$ en el plano $xy$ obtenemos la región limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ (figura 7.34); entonces integrando en esta región la correspondiente integral doble tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_S z\,dS &= \iint_A z\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy = \iint_A \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 -} \\ &= \iint_A adxdy = a\iint_A dxdy = \pi a^3 \end{aligned}$$

(por ser $\displaystyle\iint_A dxdy =$ área del círculo de radio $a = \pi a^2$).

27. Calcular $\displaystyle\iint_S x^2 + y^2 dS$, donde $S$ es la superficie lateral del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ entre $z = 0$ y $z = 1$.
Solución. Proyectando $S$ en el plano $xy$ obtenemos la región $A$ limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ (figura 7.35); entonces integrando en esta región la correspondiente integral doble tenemos:

$$\iint_S x^2 + y^2 dS = \iint_A \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{|F_z|}} dxdy = 2\iint_A \sqrt{x^2 + y^2} dxdy \quad (1)$$

con $F = x^2 + y^2 - z^2$,

$$\sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{|F_z|}} = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z} = \frac{\sqrt{8z^2}}{2z} = \sqrt{2}$$

Pasando a coordenadas polares en (1):

$$\iint_A x^2+y^2 dS = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r{\cdot}r dr d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\bigg|_0^1 d\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi.$$

**AREA DE UNA SUPERFICIE**

28. Calcular el área de una esfera de radio $R$.
Solución. Aprovechando la simetría de la esfera, calculemos solamente el área de la semiesfera superior de $x^2+y^2+z^2 = R^2$ y la multiplicamos por dos para obtener el área pedida. Proyectando en el plano $xy$ obtenemos la región $A$ limitada por la circunferencia $x^2+y^2 = R^2$; entonces integrando la correspondiente integral doble sobre $A$ tenemos:

$$\text{Area} = \iint_S dS = 2\iint_A \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} dxdy = 2\iint_A \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy \quad (1)$$

con

$$F = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z} = \frac{2R}{2z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Pasando a coordenadas polares en (1):

$$\text{Area} = 2R\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr d\theta = 2R\int_0^{2\pi} -\left(R^2 - r^2\right)^{1/2}\Big|_0^R d\theta = 2R^2\int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi R^2$$

29. Calcular el área de la región del plano $x+y+z = a$ limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

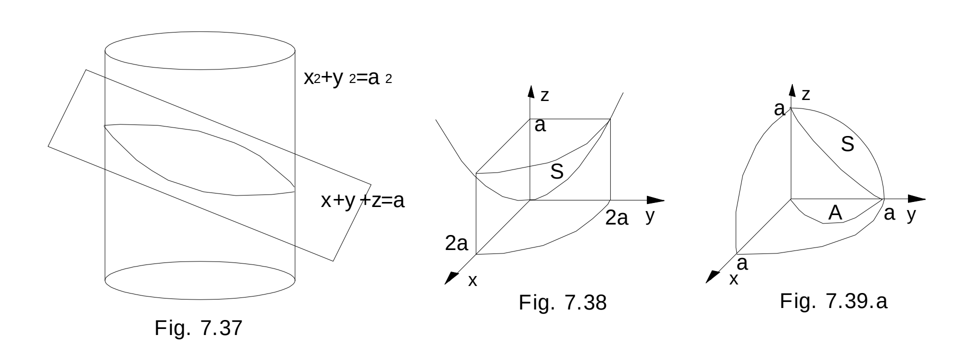


Fig. 7.37 Fig. 7.38 Fig. 7.39.a

Solución. Conviene proyectar $S$ sobre el plano $xy$, entonces eliminado la variable $z$:

$$\begin{matrix} x+y+z=a \\ x^2+y^2=a^2 \end{matrix} \Rightarrow x^2+y^2=a^2$$

la proyección en el plano $xy$ es la región $A$ limitada por la circunferencia $x^2+y^2=a^2$. Teniendo en cuenta que $z=a-x-y$ en $S$ e integrando la correspondiente integral doble en $A$, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \iint_S dS = \iint_A \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy = \iint_A \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}dxdy = \sqrt{3}\iint_A dxdy \\ &= \sqrt{3}\iint_A dxdy = \pi a^2\sqrt{3} \end{aligned}$$

(Por ser $\iint_A dxdy =$ área del círculo de radio $a = \pi a^2$).

30. Calcular el área de la porción del paraboloide $x^2+y^2=4az$ cortada por el plano $z=a$.
Solución. Proyectando la superficie $S$ en el plano $xy$ obtenemos la región $A$ limitada por la circunferencia $x^2+y^2=4a^2$ (figura 7.38): entonces teniendo en cuenta que $S$ está sobre el paraboloide e integrando la correspondiente integral doble en $A$, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \iint_S dS = \iint_A \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy = \iint_A \sqrt{1+\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4a^2}}\,dxdy \\ &= \frac{1}{2a}\iint_A \sqrt{4a^2+x^2+y^2}\,dxdy \qquad (1) \end{aligned}$$

Pasando a coordenadas polares en (1) tenemos:

$$\text{Area} = \frac{1}{2a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2a}\sqrt{4a^2+r^2}rdrd\theta = \frac{1}{2a}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(4a^2+r^2\right)^{3/2}}{3}\cdot 2\Big|_0^{2a} d\theta =$$

$$\frac{16\sqrt{2}-8}{3}a^2\int_0^{2\pi}d\theta = 8\pi a^2\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

31. Calcular el área de la porción del primer octante de la semiesfera superior $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$, interior al cilindro $x^2+y^2=ay$, siendo $a>0$.
Solución. Proyectando la superficie al plano $xy$ obtenemos la región $A$ limitada por la circunferencia $x^2+y^2=ay$ (figura 7.39a); entonces teniendo en cuenta que $S$ está sobre la esfera e integrando la correspodiente integral doble en $A$, tenemos

$$\text{Area} = \iint_S dS = \iint_A \frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}dxdy = \iint_A \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy \qquad (1)$$

con $F = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

En coordenadas polares, la circunferencia $x^2 + y^2 = ay$ se expresa por $r = a \sin \theta$. Entonces, pasando a coordenadas polares en (1) y considerando que la porción de $S$ que está en el primer octante se repite en la parte posterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \iint_A \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy = 2a \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \sin \theta} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 2a \int_0^{\pi/2} - \left(a^2 - r^2\right)^{1/2} \Big|_0^{a \sin \theta} d\theta \\
&= 2a \int_0^{\pi/2} (a - a \cos \theta)\, d\theta = 2a^2 \left(\theta - \sin \theta\right)\Big|_0^{\pi/2} = (\pi - 2)\, a^2
\end{aligned}$$

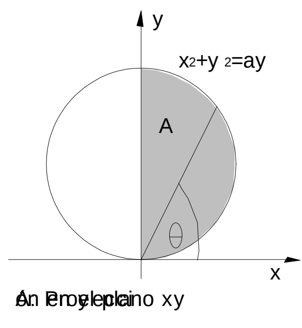


Fig. 7.39b

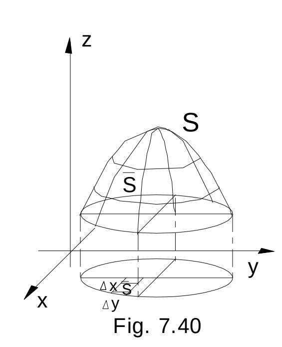


Fig. 7.40

**PROBLEMAS VARIOS DE INTEGRALES DE SUPERFICIE**

32. Calcular $\iint_S x^2 dS$, donde $S$ es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Solución. Aunque esta integral de superficie se la puede calcular pasando a integrales dobles, resulta más simple procediendo así, por simetría, tenemos:

$$I = \iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS = \iint_S z^2 dS$$

Entonces, sumando

$$3I = \iint_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dS = \iint_S R^2 dS = R^2 \iint_S dS$$

pero $\iint_S dS$ es el área de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Luego, $3I = R^2 \cdot 4\pi R^2$. Por tanto,

$$I = \iint_S x^2 dS = \frac{4}{3} \pi R^4$$

33. Justificar las fórmulas (##) y (##), Pág. ##, para el cálculo de integrales de superficie.
Solución. Consideremos la superficie $S$ dada por la ecuación $z = z(x, y)$ y sea $A$ su proyección sobre el plano $xy$. Subdividamos $A$ en $n$ partes por medio de un fino reticulado como el de la figura 7.40, esto produce una subdivisión de $S$. De la subdivisión de la región $A$ consideremos un pequeño rectángulo de área $\overline{A}$ y de dimensiones $\Delta x$, $\Delta y$ con vértice en $(x, y)$. Sea $\overline{S}$ el área de la porción de superficie $S$ correspondiente al rectángulo de área $\overline{A}$ referido. Sea $g(x, y) = (x, y, z(x, y))$ la función que aplica la región $A$ en la superficie $S$. Ahora procedemos como en el Ejercicio 47, Capitulo 6. Como $\Delta x$, $\Delta y$ son pequeños y por definición de la derivada, tenemos:

$$g\begin{bmatrix} x+\Delta x \\ y \end{bmatrix} \simeq g\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z_x & z_y \end{bmatrix}_{0}^{\Delta x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{bmatrix} \Delta x \qquad (1)$$

$$g\begin{bmatrix} x \\ y+\Delta y \end{bmatrix} \simeq g\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z_x & z_y \end{bmatrix}_{\Delta y}^{0} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{bmatrix} \Delta y \qquad (2)$$

donde las anteriores derivadas parciales se evalúan en $(x, y)$. De (1) y (2) vemos que la imágen del rectángulo $\overline{A}$ sobre el plano $xy$ es aproximadamente un paralelogramo en el espacio con vértice en $(x, y, z)$ y lados $(1, 0, z_x)\,\Delta x$, $(0, 1, z_y)\,\Delta y$. El área $\overline{S}$ es entonces aproximadamente igual al área de este paralelogramo. Es decir:

$$\begin{aligned} \overline{S} &\simeq \left|(1,0,z_x)\,\Delta x \;\times\; (0,1,z_y)\,\Delta y\right| = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} \Delta x \Delta y = \left|(-z_x, z_y, 1)\right| \Delta x \Delta y \\ &= \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}\,\Delta x \Delta y = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}\,\overline{A} \qquad (3) \end{aligned}$$

Por tanto, de (3) y la definción de integral de superficie, tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_S \phi(x,y,z)\,dS &= \lim_{n\to\infty} \left(\phi(x_1,y_2,z_2)\,S_1 + \ldots + \phi(x_n,y_n,z_n)\,S_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\phi(x_1,y_2,z_2)\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}A_1 + \ldots + \phi(x_n,y_n,z_n)\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}A_n\right) \\ &= \iint_A \phi(x,y,z)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dA \qquad (4) \end{aligned}$$

que es la fórmula buscada. Si la superficie $S$ está dada por una ecuación de la forma $F(x, y, z) = c$, entonces reemplazando en (4) las expresiones

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} \quad , \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

obtenemos la fórmula

$$\iint_S \phi(x,y,z)\,dS = \iint_A \phi(x,y,z)\,\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}dA \qquad (5)$$

**GRADIENTE. DIVERGENCIA. ROTACIONAL**

34. Mostrar que el rotacional del gradiente es nulo, es decir

$$\nabla\times(\nabla f)=0$$

Solución. Como el gradiente de $f(x,y,z)$ es

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

el rotacional de este gradiente es

$$\nabla\times(\nabla f)=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)=0$$

suponiendo que las derivadas parciales son continuas, (esto hace que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}$, por ejemplo).
**Nota**. Se sobreentiende que la función $f$ es de $R^3$ en $R$.

35. Mostrar que la divergencia del rotacional es nula, es decir

$$\nabla\circ(\nabla\times F)=0$$

Solución. El rotacional de $F(x,y,z)=(F_1,F_2,F_3)$ es

$$\nabla\times F=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z},\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x},\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

y la divergencia del rotacional es

$$\begin{aligned}\nabla\circ(\nabla\times F) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 F_3}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 F_1}{\partial z\partial y}=0\end{aligned}$$

suponiendo que las derivadas parciales so continuas.
**TEOREMA DE STOKES**

36. Verificar el teorema de Stokes para $F = y\hat{\imath} - z\hat{\jmath} + x\hat{k}$, siendo $S$ la superficie del paraboloide $z = 1 - \left(x^2 + y^2\right)$ con $z \geq 0$ y $C$ su contorno.
Solución. Por un lado, calculemos la integral de superficie. De la ecuación de la superficie $S$, $x^2 + y^2 + z = 1$, obtenemos el vector normal unitario.

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

el rotacional de $F$ es

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -z & x \end{vmatrix} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$$

Por tanto, teniendo en cuenta que la proyección de $S$ sobre el plano $xy$ es la región $A$ limitada por $x^2 + y^2 = 1$ (Figura 7.41) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\iint_S (\nabla \times F) \circ n dS &= \iint_A \left(\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}\right) \circ \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dxdy \\
&= \iint_A \frac{(2x - 2y - 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dxdy \\
&= \iint_A (2x - 2y - 1)\, dxdy \quad \text{(pasando a coordenadas polares)} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r\cos\theta - 2r\sin\theta - 1)\, rdrd\theta \\
&= \frac{2}{3}(\sin\theta + \cos\theta) - \frac{1}{2}\theta \Big|_0^{2\pi} = -\pi
\end{aligned}$$

Por otro lado, calculamos la integral curvilínea. La curva $C$, que limita a la superficie $S$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Entonces

$$\int_C F \circ d\vec{r} = \int_C ydx - zdy + xdz = \int_C ydx$$

por ser $z = 0$, $dz = 0$ en $C$

$$= \iint (0 - 1)\, dxdy$$

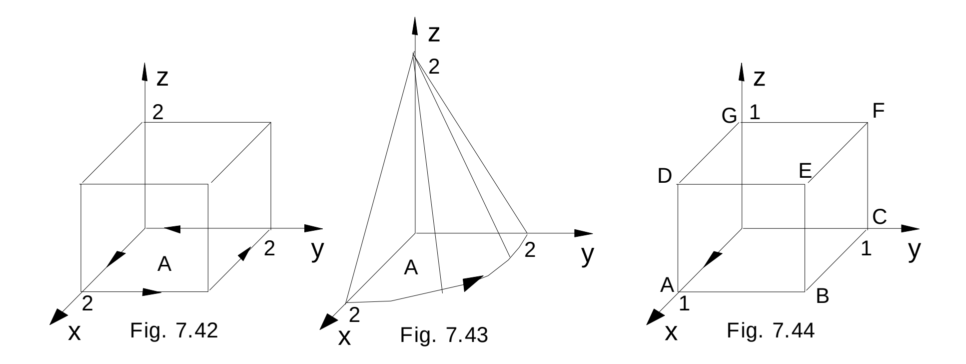
aplicando el teorema de Green en el plano

$$= -\iint dxdy = -\int_0^{2\pi} \int_0^1 rdrd\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = -\pi$$

Esto muestra que el Teorema de Stokes se verifica

$$\iint_S (\nabla \times F) \circ n dS = -\pi = \int_C F \circ d\vec{r}$$

37. Calcular $\iint_S (\nabla \times F) \circ n dS$, siendo $F = (y-z)\,\hat{\imath} + yz\hat{\jmath} - xz\hat{k}$ y $S$ consta de las cinco caras del cubo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$ sin la situada en el plano $xy$.




Solución. La curva $C$ que limita a la superficie es el contorno del cuadrado $A$ sobre el plano $xy$ con vértices en $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$ (Figura 7.42). Aplicando el teorema de Stokes tenemos:

$$\iint_S (\nabla \times F) \circ n dS = \int_C f \circ d\vec{r} = \int_C (y-z)\,dx + yzdy - xzdz = \int_C ydx$$

(por ser $z = 0$, $dz = 0$ en $C$).

$$\begin{aligned} &= \iint_A (0-1)\,dxdy \quad \text{(aplicando el teorema de Green).} \\ &= -\int_0^2 \int_0^2 dxdy = -4 \end{aligned}$$

38. Calcular $\iint_S (\nabla \times F) \circ n dS$, siendo $F = (x-z)\,\hat{\imath} + \left(x^3 + yz\right)\hat{\jmath} - 3xy^2\hat{k}$ y $S$ es la superficie del cono $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ encima del plano $xy$.
Solución. La curva $C$ que limita a la superficie $S$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ (Figura 7.43). Aplicando el teorema de Stokes tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \circ F) \circ n dS &= \int_C F \circ d\vec{r} = \int_C (x-z)\,dx + \left(x^3 + yz\right) dy - 3xy^2 dz \\ &= \int_C xdx + x^3 dy \text{ (por ser } z = 0,\ dz = 0) \\ &= \iint_A \left(3x^2 - 0\right) dxdy \text{ (aplicando el teorema de Green)} \end{aligned}$$

donde $A$ es el círculo limitado por $C$. Pasando a polares tenemos:

$$\begin{aligned}\iint_S (\nabla \times F) \circ ndS &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 3r^2\cos^2\theta \cdot rdrd\theta = 3\int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\cos^2\theta\bigg|_0^2 d\theta = 12\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\bigg|_0^{2\pi} = \pi\end{aligned}$$

39. Mostrar que $\oint_C F \circ d\vec{r} = 0$ en toda curva cerrada $C$, si $\nabla \times F = 0$.
Solución. Si $\nabla \times F = 0$, entonces aplicando el teorema de Stokes tenemos:

$$\oint_C F \circ d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times F) \circ ndS = \iint_S 0dS = 0$$

donde $S$ es una superficie abierta de dos caras limitada por $C$.
**Nota**. Se puede demostrar que $\nabla \times F = 0$ es condición necesaria y suficiente para que $\oint_C F \circ d\vec{r} = 0$ en toda curva cerrada $C$.
De las funciones cuyo rotacional es nulo, $\nabla \times F = 0$, se suele decir que son irrotacional; a partir del Ejercicio 38 es fácil demostrar que las integrales curvilíneas $\oint_C F \circ d\vec{r}$ son independentes del camino si $F$ es irrotacional.
Por ejemplo, las funciones $f(r)\vec{r}$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{r} = (x, y, z)$ y $f$ es derivable, son irrotacionales. Por otra parte, si $F$ es irrotacional, la expresión $F \circ d\vec{r}$ es una diferencial exacta. El estudio de estos y otros temas corresponden a un curso de Análisis Vectorial.
**TEOREMA DE LA DIVERGENCIA**

40. Verificar el teorema de la divergencia para $F = x^2\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$ en la región $V$ limitada por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.
Solución. Por un lado, calculemos la integral de superficie sobre la superficie $S$ que limita a $V$. La integral de superficie sobre $S$ es la suma de las integrales de superficie sobre cada una de las caras del cubo $V$. (Figura 7.44).
Cara $OABC$: Aquí $n = -k$ y, por tanto,

$$\iint_{OABC} F \circ ndS = \iint_{OABC} -z^2dxdy = 0 \text{ (por ser } z = 0 \text{ en la cara } OABC)$$

Cara $DEFG$: Aquí $n = k$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}\iint_{DEFG} F \circ ndS &= \iint_{OABC} z^2dxdy \text{ (por ser } OABC \text{ la proyección de la cara } DEFG \text{ sobre el plano} \\ &= \int_0^1\int_0^1 dxdy = 1 \text{ (por ser } z = 1 \text{ en la cara } DEFG).\end{aligned}$$

Cara $OCFG$: Aquí $n = -\hat{\imath}$ y, por tanto,

$$\iint_{OCFG} F \circ ndS = \iint_{OCFG} -x^2 dydz = 0 \text{ (por ser } x = 0 \text{ en la cara } OCFG)$$

Cara $ABDE$: Aquí $n = i$ y, por tanto,

$$\iint_{ABDE} F \circ ndS = \iint_{OCFG} x^2 dydz = \int_0^1 \int_0^1 dydz = 1$$

(Por ser $OCFG$ la proyección $ABDE$ sobre el plano $yz$, y $x = 1$ en la cara $ABDE$).
Cara $OADG$: Aquí $n = -j$ y, por tanto,

$$\iint_{OADG} F \circ ndS = \iint_{OADG} -y^2 dydz = 0 \text{ (por ser } y = 0 \text{ en la ara } OADG)$$

Cara $BCEF$: Aquí $n = j$ y, por tanto,

$$\iint_{BCEF} F \circ ndS = \iint_{OADG} y^2 dxdz = \int_0^1 \int_0^1 dxdz = 1$$

(Por ser $OADG$ la proyección de $BCEF$ sobre el plano $xz$, y $y = 1$ en la cara $BCEF$).
Luego, sumando

$$\iint_S F \circ ndS = 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 3$$

Por otro lado, calculamos la integral triple sobre $V$:

$$\begin{aligned}
\iiint_V \nabla \circ FdV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2x + 2y + 2z)\, dzdydx = 2 \int_0^1 \int_0^1 (x + y)\, z + \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^1 dydx \\
&= 2 \int_0^1 \int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2}\right) dydx = 2 \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right) y + \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 dx \\
&= 2 \int_0^1 (x + 1)\, dx = \left.\frac{2\,(x + 1)^2}{2}\right|_0^1 = 3
\end{aligned}$$

Por tanto, el teorema de la Divergencia se verifica:

$$\iiint_V \nabla \cdot FdV = 3 = \iint_S F \circ ndS$$

41. Calcular $\iint_S F \circ ndS$, siendo $F = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + y\vec{k}$ y $S$ es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 1$, $z = -1$.

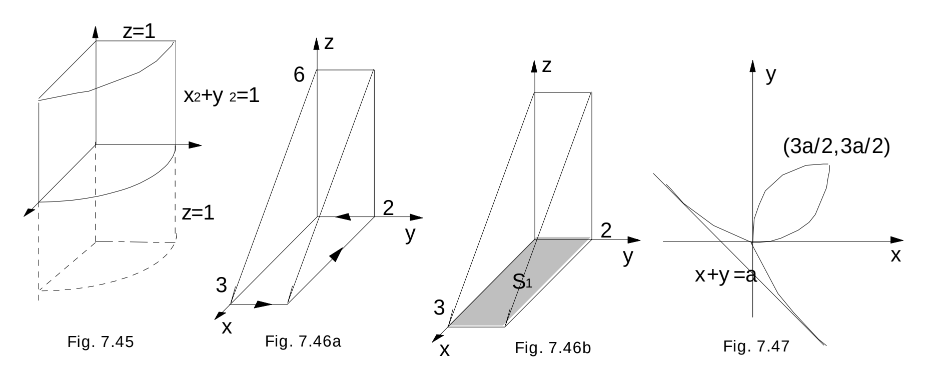



Fig. 7.45 Fig. 7.46a Fig. 7.46b Fig. 7.47

Solución. Conviene aplicar el teorema de la Divergencia, así

$$\iint_S F \circ ndS = \iiint_V \nabla \circ FdV = \iiint_V \left(y^2 + x^2 - 1\right) dV$$

donde $V$ es la región encerrada por $S$. Por tanto, pasando a coordenadas polares tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_S F \circ ndS &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1}^1 \left(r^2+1\right) rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^3+r\right) z\Big|_{-1}^1 drd\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3 + \\ &= 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^1 d\theta = 2\cdot\frac{3}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = 3\pi \end{aligned}$$

42. Calcular $\iint_S F \circ ndS$, siendo $F = 2x\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$ y $S$ es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Solución. Conviene aplicar el teorema de la Divergenca, así

$$\begin{aligned} \iint_S F \circ ndS &= \iiint_V \nabla \circ FdV = \iiint_V (2 + 2y + 2z)\, dV \text{ (donde } V \text{ es la región limitada por} \\ &= 2\iiint_V dV + 2\iiint_V (y+z)\, dV \\ &= 2\cdot\frac{4}{3}\pi + 2\cdot 2\iiint_V zdV \end{aligned}$$

(por ser $\iiint_V dV =$ vol. esfera de radio 1$= \frac{4}{3}\pi$ y por ser $\iiint_V ydV = \iiint_V zdV$, por simetría)

$$= \frac{8}{3}\pi + 0 = \frac{8}{3}\pi$$

(Por ser $\iiint_V zdV = \iiint_{\overline{V}} zd\overline{V} + \iiint_{\underline{V}} zd\underline{V} = \iiint_{\overline{V}} zd\overline{V} - \iiint_{\overline{V}} zd\overline{V} =$ 0 donde $\overline{V}$ es la semiesfera superior y $\underline{V}$ es la semiesfera inferior).

**PROBLEMAS VARIOS DE TEOREMAS INTEGRALES**

43. Si $n$ es el vector normal exterior unitario a una superficie cerrada de área $S$, mostrar que

$$\iiint_V \nabla \circ n dV = S$$

Solución. Con $F = n$ aplicando el teorema de la divergencia, así

$$\iiint_V \nabla \circ n dV = \iint_S n \circ n \, dS = \iint_S dS = S$$

44. Si $H = \nabla \times F$, mostrar que $\iint_S H \circ n dS = 0$ para cualquier superficie cerrada $S$.
Solución. Aplicando el teorema de la Divergencia y teniendo en cuenta que

$$\nabla \circ (\nabla \times F) = 0 \text{ (ejercicio 34)},$$

tenemos

$$\iint_S H \circ n dS = \iiint_V \nabla \circ H dV = \iiint_V \nabla \circ (\nabla \times F) \, dV = 0$$

45. Si $S$ es una superficie cerrada constituida por dos superficies abiertas $S_0$ y $S_1$, mostrar que

$$\iint_{S_0} (\nabla \times F) \circ n dS = -\iint_{S_1} (\nabla \times F) \circ n dS$$

Solución. Por el Ejercicio 42 tenemos

$$\iint_S (\nabla \times F) \circ n dS = 0 \quad (1)$$

pero, como

$$\iint_S (\nabla \times F) \circ n dS = \iint_{S_0} (\nabla \times F) \circ n dS + \iint_{S_1} (\nabla \times F) \circ n dS \quad (2)$$

Entonces, de (1) y (2) obtenemos la relación pedida

$$\iint_{S_0} (\nabla \times F) \circ n dS = -\iint_{S_1} (\nabla \times F) \circ n dS$$

46. Calcular $\iint_S (\nabla \times F) \circ n dS$, siendo $F = (y+z)\,\hat{\imath} - xz\hat{\jmath} + y^2\hat{k}$ y $S$ la superficie de la región del primer octante limitada por $2x + z = 6$, $y = 2$ que no queda en el plano $xy$.
Solución. Este problema podemos resolver elegantemente de dos maneras:
**Procedimiento 1**. Aplicando el teorema de Stokes a la superficie $S$ y su contorno $C$ (Figura 7.46a) tenemos

$$\iint_S (\nabla \times F) \circ n dS = \int_C F \circ d\vec{r} = \int_C (y+z)\,dx - xzdy + y^2dz = \int_C ydx$$

(por ser $z = 0$, $dz = 0$ en $C$)

$$= \iint_A (0-1)\,dxdy \text{ (por teorema de Green)} = -\iint_A dxdy = -2{\cdot}3 = -6$$

**Procedimiento 2**. Por el Ejercicio 44, la integral sobre la superficie $S$ es igual a la integral sobre la "tapa" $S_1$ que está en el plano $xy$ pero con signo cambiado (Figura 7.46b); es decir

$$\begin{aligned}
\iint_S (\nabla \times F) \circ n dS &= -\iint_{S_1} (\nabla \times F) \circ n dS \\
&= -\iint_{S_1} \left((2y+x)\,\hat{\imath} + \hat{\jmath} - (1+z)\,\hat{k}\right) \circ \left(\hat{k}\right) dS \\
&= -\iint_{S_1} dS
\end{aligned}$$

(por ser $\hat{\imath} \circ \hat{k} = \hat{\jmath} \circ \hat{k} = 0$, $\hat{k} \circ \hat{k} = 1$, y $z = 0$ en $S_1$)

$$= -\,(\text{área de } S_1) = -\,(3 \cdot 2) = -6$$

## 7.15 EJERCICIOS PROPUESTOS

### CALCULO DIRECTO DE INTEGRALES CURVILINEAS

1. Calcular $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \sqrt{y}dx + (x-y)\,dy$ a lo largo de la recta $x = y$.

2. Calcular $\int_{(0,0)}^{(1,3)} x^2ydx + \left(x^2 - y^2\right) dy$ a lo largo de a) $y = 3x^2$, b) $y = 3x$.

3. Calcular $\int_{(1,1)}^{(2,8)} \left(5xy - 6x^2\right) dx + (2y - 4x)\,dy$ a lo largo de $y = x^3$.

4. Calcular $\int_{(1,1)}^{(4,3)} \left(2x - y^2\right) dx + \left(y - x^2\right) dy$ a lo largo de los segmentos a) de $(1,1)$ a $(3,1)$ y de $(3,1)$ a $(3,4)$; b) de $(1,1)$ a $(1,4)$ y de $(1,4)$ a $(3,4)$.

5. Calcular $\int_C (x^2 + y^2)\, dx - 2xydy$, donde $C$ está dada paramétricamente por $x = t$, $y = t^2 - t$, y $t$ varía de $t = 1$ a $t = 2$.

6. Calcular $\int_C x^2dx + y^2dy$, donde $C$ está dada por $x = \sin t$, $y = \cos t$, desde $(1, 0)$ a $(0, 1)$.

7. Calcular $\int_{(0,0)}^{(1,1)} x^2dx + y^2dy$, a lo largo de a) la recta $x = y$, b) la parábola $x = y^2$, c) la parábola $y = x^2$, d) la cúbica $x = t$, $y = t^3$.

8. Calcular $\int_{(1,1)}^{(2,4)} (x - 2y)\, dx + (x + 2y)\, dx$, a lo largo de a) la parábola $y = x^2$, b) de una recta, c) de los segmentos de $(1, 1)$ a $(2, 1)$ y de $(2, 1)$ a $(2, 4)$, d) de la curva $x = t^2 + 1$, $y = 2t^2 + t + 1$.

9. Calcular $\oint_C (2x + y^2)\, dx + (3y - 14x)\, dy$, donde $C$ es el contorno de la región limitada por $y = x^2$, $x = y^2$.

10. Calcular $\oint_C (y - 2x)\, dx + (3x + 2y)\, dy$, donde $C$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

11. Calcular $\int_C (2y + 3)\, dx + xzdy + (yz - x)\, dz$, a lo largo de la curva $C$ dada por $x = 2t^2$, $y = t$, $z = t^3$ desde $t = 0$ a $t = 1$.

12. Calcular $\int_C 3x^2dx + (2xz - y)\, dy + zdz$, a lo largo a) de la línea de $(0, 0, 0)$ a $(2, 1, 3)$, b) la curva $x = 2t^2$, $y = t$, $z = 4t^2 - t$ desde $t = 0$ a $t = 1$, c) la curva definida por $x^2 = 4y$, $3x^3 = 8z$ desde $x = 0$ a $x = 2$.

**TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO**

13. Verificar el teorema de Green en el plano para $\int_C (3x^2 - 8y^2)\, dx + (4y - 6xy)\, dy$, donde $C$ es la región limitada por: a) $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, b) $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$.

14. Comprobar el teorema de Green en el plano para $\int_C xy^2dx + (x^3 - x^2y)\, dy$, siendo $C$ el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$.

15. Comprobar el teorema de Green en el plano para $\int_C (3x + 4y)\, dx + (2x - 3y)\, dy$, siendo $C$ la circunferencia centrada en el origen de radio dos.

16. Calcular $\int_C \left(x^2 - 2xy\right) dx + \left(x^2 y + 3\right) dy$ alrededor del contorno $C$ de la región limitada por $y^2 = 8x$, $x = 2$, a) directamente, b) usando el teorema de Green.

17. Calcular $\int_C \left(x^2 + y^2\right) dx + \left(2x + y^2\right) dy$, donde $C$ es el contorno del cuadrado con vértices $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(1,2)$.

18. Calcular $\int_C (2x + y)\, dx + x^2 y dy$, donde $C$ es el contorno de la región limitada por $x = 0$, $y = 0$, $y = 1 - x^2$ y $x^2 + y^2 = 9$.

19. Calcular $\int_C \left(2x - y^3\right) dx - xydy$, donde $C$ es el contorno de la región limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.

20. Calcular $\int_C \frac{1 - y^2}{(1+x)^3} dx + \frac{y}{(1+x)^2} dy$, a lo largo de la circunferencia centrada en $(0,1)$ y de radio 1.

**AREA ENCERRADA POR UNA CURVA**

21. Hallar el área del círculo limitado por $x^2 + y^2 = R^2$.

22. Mostrar que, pasando a coordenadas polares, la forma que da el área encerrada por una curva $C$ es

$$\text{área} = \frac{1}{2} \oint_C r^2 d\theta$$

23. Hallar el área de ambas hojas de la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

24. Hallar el área de la hoja de Descartes $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$ (ver figura adjunta) (Sugerencia: Hacer $y = tx$ y obtenerla ecuación paramétrica de la curva. Luego usar el hecho

$$\text{área} = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2} \oint_C x^2 d\left(y/x\right) = \frac{1}{2} \oint x^2 dt$$

25. Si $C$ es el contorno de una región de área $A$, mostrar que

$$\oint_C aydx + bxdy = (b - a)\, A$$

**INDEPENDENCIA DEL CAMBIO DE INTEGRACION**

26. a) Mostrar que $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x + y)\, dx + (x - y)\, dy$ es independiente del camino que une $(0,1)$ con $(2,3)$ b) calcular la integral.

27. Mostrar que $\int_{(0,1)}^{(1,2)} \left(x^2+y^2\right) dx + 2xydy$ es independiente del camino, calcular su valor.

28. Calcular $\int_C \left(2xy^3 - y^2\cos x\right) dx + \left(1 - 2y\sin x + 3x^2y^2\right) dy$ a lo largo de la parábola $2x = \pi y^2$ desde $(0,0)$ a $(\pi/2, 1)$.

29. Calcular la integral curvilínea del problema anterior en torno a un paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(3,0)$, $(5,2)$, $(2,2)$.

30. Calcular $\int_C 3x^2y^2dx + 2x^3ydy$ a lo largo de la circunferencia de centro en el origen y de radio $R$.
En los siguientes ejercicios para $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ dados, a) mostrar que $Pdx + Qdy$ es una diferencial exacta y determinar $\phi(x,y)$ tal que $d\phi = Pdx + Qdy$ b) Calcular $\int_{(a,b)}^{(c,d)} Pdx + Qdy$.

31. $\int Pdx + Qdy = 2xydx + x^2dy$, $(a,b) = (0,0)$ y $(c,d) = (1,4)$.

32. $\int Pdx + Qdy = (xdy - ydx)/x^2$, $(a,b) = (1,0)$ y $(c,d) = (3,2)$.

33. $\int (xdx - ydy)/\left(x^2+y^2\right)$, $(a,b) = (1,0)$ y $(c,d) = (3,5)$.

34. $\int e^x dx + e^{-y}dy$, $(a,b) = (0,0)$ y $(c,d) = (x,3)$.

35. $\int Pdx + Qdy = \left(2xy - y^3\right) dx + \left(x^2 - 3xy^2\right) dy$, $(a,b) = (0,0)$ y $(c,d) = (3,1)$.

**INTEGRALES DE SUPERFICIE**

36. Calcular $\iint_S zdS$, donde $S$ es la superficie del tetraedro limitado por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y + 3z = 6$.

37. Calcular $\iint_S \left(x^2+y^2\right) dS$, donde $S$ es la superficie lateral del cono $z^2 = 3\left(x^2+y^2\right)$, $0 \leq z \leq 3$.

38. Calcular $\iint_S \left(x^2+y^2\right) dS$, donde $S$ es la esfera $x^2+y^2+z^2 = R^2$.

39. Calcular $\iint_S zdxdy$, donde $S$ es la cara exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

**ÁREA DE UNA SUPERFICIE**

40. Calcular el área de la región del plano $x - 2 + 3z = 0$ limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

41. Calcular el área de la superficie lateral de un cilindro de radio y altura $h$.

42. Calcular el área del plano $2x + y + 2z = 16$ limitada por a) $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 3$, b) $x = 0$, $y = 0$ y $x^2 + y^2 = 64$.

43. Hallar el área de la superficie del paraboloide $2z = x^2 + y^2$ que queda fuera del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

44. Hallar el área de la superficie del cono $z^2 = 3\left(x^2 + y^2\right)$ limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

45. Hallar el área de la superficie común a los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$.

46. Hallar el área de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ dentro del cono $z \tan \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < \alpha < \pi/2$. Utilizar este resultado para averiguar el área de una superficie semiesférica.
**GRADIENTE. DIVERGENCIA. ROTACIONAL**
Demostrar:

47. $\nabla (f + g) = \nabla f + \nabla g$.

48. $\nabla \circ (F + G) = \nabla \circ F + \nabla \circ G$.

49. $\nabla \times (F + G) = \nabla \times F + \nabla \times G$

50. $\nabla \times (\nabla f) = \nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.
**Nota**. $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ se llama operador Laplaciano.

51. Demostrar $\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla (\nabla \circ F) - \nabla^2 F$.
**Nota**. Esta fórmula relaciona el gradiente, la divergencia y el rotacional.

52. Si $f = xy + yz + zx$, y $F = x^2 y\hat{\imath} + y^2 z\hat{\jmath} + z^2 x\hat{k}$; hallar a) $F \circ \nabla f$, b) $f \nabla \circ f$, c) $(\nabla f) \times f$ en el punto $(3, -1, 2)$.

53. Verificar el resultado del Ejercicio 51 si $F = 3xz^2\hat{\imath} - yz\hat{\jmath} + (x + 2z)\,\hat{k}$.
**TEOREMA DE STOKES**

54. Verificar el teorema de Stokes para $F = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ y $S$ es la semiesfera superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z \geq 0$.

55. Verificar el teorema de Stokes para $F = (y - z + 2)\,\hat{\imath} + (yz + 4)\,\hat{\jmath} - xz\hat{k}$, si $S$ es la superficie del cubo $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$ sobre el plano $xy$.

56. Calcular $\iint_S (\nabla \times F) \circ ndS$, siendo $F(x-z)\,\hat{\imath} + \left(x^3 + yz\right)\hat{\jmath} - 3xy^2\hat{k}$, y $S$ es la superficie del cono $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ encima del plano $xy$.

57. Calcular $\iint_S (\nabla \times F) \circ ndS$, donde $F = \left(x^2 + y - 4\right)\hat{\imath} + 3xy\hat{\jmath} + \left(2xz + z^2\right)\hat{k}$, y $S$ es la superficie de a) el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ sobre el plano $xy$, b) el paraboloide $z = 4 - \left(x^2 + y^2\right)$ sobre el plano $xy$.

58. Calcular $\iint_S (\nabla \times F) \circ ndS$, sobre la superficie de intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$ que está incluida en el primer octante.
**TEOREMA DE LA DIVERGENCIA**

59. Verificar el teorema de la Divergencia para $F = (2xy + z)\,\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} - (x + 3y)\,\hat{k}$, en la región limitada por $2x + 2y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

60. Verificar el teorema de la Divergencia para $F = 2x^2y\hat{\imath} - y^2\hat{\jmath} + 4xz^2\hat{k}$, en la región $V$ del primer octante limitada por $y^2 + z^2 = 9$, $x = 2$.

61. Calcular $\iint_S F \circ ndS$, donde $F = \left(z^2 - x\right)\hat{\imath} - xy\hat{\jmath} + 3z\hat{k}$ y $S$ es la superficie de la región limitada por $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$, y el plano $xy$.

62. Calcular $\iint_S \vec{r} \circ ndS$, donde a) $S$ es la esfera de radio 2, centrada en el origen. b) $S$ es la superficie del cubo $x = -1$, $y = -1$, $z = -1$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

63. Demostrar que $\iint_S ndS = 0$, siendo $n$ la normal exterior a una superficie cerrada cualquiera $S$.

# Chapter 8

# SUCESIONES Y SERIES

## 8.1 INTRODUCCIÓN

La paradoja de Zenón de Elea

Zenón de Elea (495-435 a. de C.), filósofo griego, pus a prueba la matemática de su tiempo por medio de ingeniosas paradojas. Una de ellas afirma que "un corredor no puede alcanzar nunca la meta porque siempre ha de recorrer la mitad de una distancia antes de recorrer la distancia total. Es decir, cuando haya recorrido la primera mitad le quedará por recorrer todavía la otra mitad. Cuando haya recorrido la mitad de ésta, le quedará todavia la cuarta parte, cuando haya recorrido la mitad de esta cuarta parte le quedará la octava parte, y así sucesivamente e indefinidamente. Es decir, el corredor no llegará nunca a la meta".

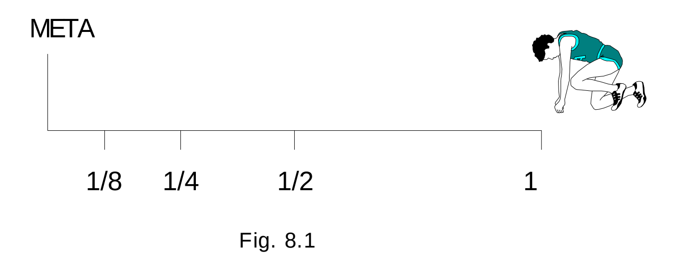



Fig. 8.1

Para analizar el razonamiento de Zenón de Elea designemos por 1 el lugar donde se encuentra inicialmente el corredor y por 0 la meta (Figura 8.1). Supongamos que el corredor corre a velocidad **constante** y necesita $T$ minutos para llegar la primera mitad del recorrido -de 1 a $\frac{1}{2}$-, para el siguiente cuarto de recorrido necesitará $\frac{T}{2}$ minutos -de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$- y, en genera, para correr de $\frac{1}{2^n}$ a $\frac{1}{2^{n+1}}$ necesitará $\frac{T}{2^n}$ minutos. Como para recorrer por separado cada una de

estas partes se necesita cierta cantidad de tiempo, es natural decir que el tiempo necesario para recorrer todo el trayecto -de 1 a 0- y llegar a la meta ha de ser la suma total de todas estas cantidades de tiempo. Simbólicamente, esta "suma" se puede expresar por

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + ... + \frac{T}{2^n} + ... \tag{8.1}$$

Por otra parte, si en el análisis de la paradoja de Zenón suponemos que debido al cansancio la velocidad del corredor **decrece gradualmente** de modo que necesita $T$ minutos para recorrer de 1 a $\frac{1}{2}$; $\frac{T}{2}$ minutos para ir de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$, $\frac{T}{3}$ minutos para ir de $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{8}$, y en general $\frac{T}{n}$ minutos para ir de $\frac{1}{2^{n-1}}$ a $\frac{1}{2^n}$. El tiempo que necesitará ahora el corredor para llegar a la meta estará expresado por

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{3} + ... + \frac{T}{n} + ... \tag{8.2}$$

En este capítulo se estudian "sumas infinitas" como (1), (2); en particular se establece que la suma infinita (1) es igual a $2T$ (entonces, el corredor llega a la meta y lo hace en $2T$ minutos) y que la suma (2) crece sin control a medida que tomamos más términos en la suma (es decir, el corredor no llega nunca a la meta, tal como afirmaba Zenón de Elea, cuando su velocidad decrece del modo referido).

## 8.2 SUCESIONES

Una función que a cada número natural natural $n$ asigna un término $a(n)$ ó $a_n$ se llama sucesión.

El término $a_n$ se llama término n-ésimo de la sucesión, y la sucesión misma se representa por $\{a_n\}$.

Ejemplo 8.1. El conjunto 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... es una sucesión, su término n-ésimo es $a_n = \frac{1}{n}$.

**Nota**. Notamos que aunque una sucesión es por definición una función, se la representa como como un conjunto.

## 8.3 LIMITE DE UNA SUCESIÓN

Se dice que $L$ es el límite de una sucesión $\{a_n\}$ si a medida que $n$ crece, los términos $a_n$ se aproximan cada vez más o son iguales a $L$. Es decir, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N$ tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon, \text{ para } n \geq N$$

(En la figura 8.2 se ilustra gráficamente la definición del límite de una sucesión).

Si una sucesión tiene límite se dice que **converge** y si no tiene límites se dice que **diverge**.

Ejemplo 2. a) La sucesión $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... converge a cero.

Pues $a_n = \frac{1}{2^n}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

b) La sucesión 1, −1, 1, −1, ... diverge (no converge), pues $a_n = (-1)^{n-1}$ y $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}$ no existe.

Las sucesiones que como ésta van tomando alternadamente valores mayores y menores sin tender a ningún límite, se llaman oscilantes.

### 8.3.1 Propiedades

Muchas propiedades de las sucesiones son análogas a la de las funciones. Por ejemplo, si $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, entonces:

1. $\lim_{n\to\infty} (ka_n) = k \lim_{n\to\infty} a_n = kA$, $k$ constante.
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$.
3. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$.
4. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$, si $B \neq 0$, y $b_n \neq 0$.

Además, algunas propiedades particularmente útiles para realizar un estudio analítico de las sucesiones son:

5. Toda sucesión acotada, creciente o decreciente, es convergente.
6. Toda sucesión no acotada es divergente.
7. El carácter de una sucesión convergente (o divergente) no cambia al eliminar un número finito de sus términos.
8. El límite de una sucesión convergente es único.

## 8.4 SERIES

A la sucesión $\{S_n\}$, donde $S_n$ es la suma de los $n$ primeros términos de otra sucesión $\{a_n\}$

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

se llama serie, y generalmente se simboliza por $\sum a_n$, o también por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... \tag{8.3}$$

Al término $a_n$ se llama término general de la serie (3).

Si la serie (3) converge hacia $L$ se dice que $L$ es la suma de dicha serie; se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

### 8.4.1 Series especiales

Algunas series especiales son:

1. La serie geométrica de razón $r$

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$$

converge si $|r| < 1$, y diverge si $|r| \geq 1$. Más aún, cuando converge su límite se determina fácilmente:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ... = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1 \tag{8.4}$$

2. La serie Armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... \tag{8.5}$$

es divergente.

3. La serie $p$ de Riemann

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + ... \tag{8.6}$$

converge si $p > 1$, y diverge si $p \leq 1$ (ver Ejercicio 18).

## 8.5 CRITERIOS DE CONVERGENCIA

En algunos casos, cmo para la serie geométrica, no solamente se sabe que la serie converge sino que también se conoce el límite a cual converge; sin embargo, en general es muy difícil averiguar el límite de una serie convergente. Existen algunos criterios que permiten determinar en muchos casos el carácter (convergente o divergente) de una serie.

Para las series $\sum a_n$ de términos positivos, $a_n \geq 0$, se tienen los siguientes criterios:

1. Criterio de divergencia.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum a_n$ es divergente (ver ejercicio 9 y 10).

2. Criterio de comparación. Si $a_n \leq b_n$, entonces:

a) La serie $\sum a_n$ converge si $\sum b_n$ converge.

b) La serie $\sum b_n$ diverge si $\sum a_n$ diverge (ver ejercicio 11).

Para utilizar este criterio se debe conocer muchas series convergentes y divergentes con las cuales poder comparar. La serie $p$ de Riemann suele ser muy útil. Ver ejercicio 41.

3. Criterio de comparación por el cociente. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0 \text{ ó } \infty$$

Entonces las series $\sum a_n$, $\sum b_n$ o ambas convergen o ambas divergen.

Como en el anterior criterio, para aplicar este criterio debemos conocer la convergencia o divergencia de muchas series (ver ejercicio 12).

4. Criterio del cociente (o de D'alembert). Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

Entonces la serie $\sum a_n$ converge si $L < 1$, diverge si $L > 1$. Si $L = 1$ el criterio falla.

Al aplicar este criterio es útil tener en cuenta que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \text{ y } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1,$$

$c$ constante.

6. Criterio de Raabe. Si

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$$

entonces la serie $\sum a_n$ converge si $L > 1$, diverge si $L < 1$, si $L = 1$ el criterio falla (ver ejercicio 42).

Al aplicar los anteriores criterios se puede usar la regla de L'hopital para calcular los límites.

7. Criterio de Gauss. Si

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{L}{n} + \frac{c_n}{n^2}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} c_n = A \text{ (número)}$$

entonces la serie $\sum a_n$ converge si $L > 1$, diverge si $L \leq 1$.

Este criterio se usa cuando falla el de Raabe (ver ejercicio 43).

8. Criterio de la Integral. Si $f(n) = a_n$, para $n \geq N$, entonces la serie $\sum a_n$ es convergente o divergente según que la integral

$$\int_N^{\infty} f(x)\, dx$$

sea convergente o divergente. En general se suele tomar $N = 1$.

**Nota**. Es necesario precisar que para aplicar el criterio de la integral, la función $f(x)$ debe ser positiva, continua y decreciente para $x \geq N$ (ver ejercicios 17 y 18).

### 8.5.1 Casos en que se debe aplicar un criterio de convergencia

Cuando el término general $a_n$ de una serie de términos positivos está formado solamente por polinomios o raíces de polinomios, se aplica el criterio de comparación por el cociente usando la serie $p$ de Riemann para comparar. Cuando el término general $a_n$ está formado por factoriales y potencias enésimas se aplica el criterio del cociente. Cuadno el criterio general $a_n$ está formado solamente por potencias n-ésimas se aplica el criterio de la Raíz. Estas recomendaciones son, obviamente, muy generales.

**Nota 1**. Durante la aplicación de los criterios de convergencia frecuentemente se debe calcular el límite de un cociente de dos potencias de $n$. Este tipo de límites se calculan fácilmente. Recordemos que si el exponente mayor del

numerador es más grande que el mayor del denominador, el límite del cociente es $\infty$; si es más pequeño el límite es 0. En caso de que sean iguales el límite es el cociente de los coeficientes de los términos de mayor potencia.

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4+n-1}{n^2-2n+3} = \infty.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2-n+1} = 0.$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3-1}{2n^3+n-1} = \frac{3}{2}$
4. Generalmente, cuando se aplica el criterio de comparación por el cociente, la serie dada se compara con la serie $p$ de Riemann: $\sum \frac{1}{n^p}$, donde $p$ es igual a la diferencia entre los exponentes mayores tanto del numerador como del denominador.

Ejemplo. Dada la serie $\sum \frac{2n-1}{n^{3/2}-n+1}$, la comparamos con la serie $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^{3/2}-n+1}}{\frac{1}{n^{1/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{3/2}-n^{1/2}}{n^{3/2}-n+1} = 2 \text{ (número)}$$

# 8.6 SERIES ALTERNAS

Son las series de términos alternadamente positivos y negativos.

Ejemplo 3. La serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+...$$

es una serie alternada.

## 8.6.1 Criterio de convergencia para series alternadas

El siguiente es un criterio sumamente útil, en muchos casos, para determinar el carácter de una serie alternada:

Si $a_{n+1} < a_n$, $n = 1, 2, ...$, entonces la serie alternada $\sum (-1)^{n-1} a_n$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ejemplo 4. Para la serie:

$$\sum (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+... \qquad (8)$$

tenemos $a_n = \frac{1}{n}$.

Como $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ (es decir $a_{n+1} < a_n$) y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (es decir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$) entonces la serie (8)es convergente.

Una cuestión que surge inmediatamente es si al agrupar en cualquier orden los términos de una serie alternada el carácter (convergente o divergente) de la serie no cambia. La respuesta es sorprendente.

## 8.7 CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONDICIONAL

En lugar de analizar la serie $\sum a_n$ (alternada o no), podemos analizar la serie de valores absolutos $\sum |a_n|$. Si la serie de valores absolutos $\sum |a_n|$ converge, se dice que la serie $\sum a_n$ converge absolutamente.

Si una serie alternada no es absolutamente convergente pero converge, se dice que la serie es condicionalmente convergente.

Si una serie es absolutamente convergente, entonces es convergente.

**Nota 2**. Por supuesto, para averiguar si una serie es o no absolutamente convergente se aplica a la serie de valores absolutos $\sum |a_n|$ uno de los ocho criterios de convergencia para series de términos positivos de las pág. ## y ##.

**Nota 3**. En la práctica, se comienza analizand si una serie alternada es absolutamente convergente. En caso de que lo sea, la serie es convergente de hecho; si la serie no es absolutamente convergente se estudia su convergencia por medio del Criterio de Convergencia para series alternadas.

Ejemplo 5. Para la serie alternada

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + ... \quad (9)$$

tenemos $|a_n| = \frac{1}{2^n}$. Y por el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$$

La serie (9) es absolutamente convergente y, por tanto, convergente.

Ejemplo 6. Para la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... \quad (10)$$

tenemos $|a_n| = \frac{1}{n}$. Entonces la serie de valores absolutos es la serie Armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... \quad (11)$$

que como es sabido, es divergente. Entonces la serie (10) no es absolutamente convergente; sin embargo, por el ejemplo 4, sabemos que esta serie es convergente. Por tanto, la serie

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$$

es condicionalmente convergente.

### 8.7.1 El límite de una serie alterna convergente

En muchos casos se puede calcular con mucha precisión. De hecho, el error numérico que se comete al despreciar los términos que siguen a uno dado es menor que el valor absoluto del siguiente a éste.

Lo anterior es cierto para las series alternadas $\sum(-1)^n a_n$ tales que $a_{n+1} < a_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ejemplo 7. Despreciando los términos siguientes al cuarto de la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ...$$

tenemos que la suma $S$ de la serie es aproximadamente

$$S \simeq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

el error cometido es menor que $\frac{1}{5} = 0.2$.

Si una serie alternada es condicionalmente convergente se puede reagrupar sus términos para obtener una serie convergente a cualquier número elegido de antemano o, si se prefiere, que sea divergente.

Esto no ocurre si la serie alternada es absolutamente convergente, en este caso los términos se pueden reagrupar en **cualquier** orden y las series resultantes son todas convergentes hacia la misma suma.

## 8.8 SERIES DE POTENCIA

Una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... \qquad (12)$$

donde $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... son constantes, se llama serie de potencias de $x$.

Similarmente, una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + a_3 (x-a)^3 + ... \quad (13)$$

se llama serie de potencias de $(x-a)$.

### 8.8.1 Intervalo de convergencia

Para cada valor de $x$, la serie (12) ó (13) se convierte en una serie numérica convergente o divergente. En general, una serie de potencias de $(x-a)$ converge en un intervalo $|x-a| < R$ y diverge en $|x-a| > R$; en $|x-a| = R$ la serie puede o no converger. El intervalo donde la serie converge se llama precisamente intervalo de convergencia de la serie y $R$ es su radio de convergencia. El intervalo de convergencia puede o no incluir a los extremos.

En general, el intervalo de convergencia se puede encontrar por medio de criterio del Cociente. A veces es necesario usar otros criterios.

Ejemplo 8. Determinar el intervalo de convergencia de

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$$

por el criterio del cociente.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\,x^{n+1}}{a_n\,x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$$

entonces la serie es convergente para todos los valores de $x$, el intervalo de convergencia es

$$|x|<\infty$$

### 8.8.2 Desarrollo de funciones en series de potencias

Si en el desarrollo de Taylor de $f(x)$ en el punto $x=a$.

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n \quad (14)$$

(donde el resto $R_n$ está dado por $R_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, con $c$ entre $x$ y $a$) se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$; entonces (14) se puede expresar como una serie de potencias de $(x-a)$:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+... \quad (15)$$

esta serie se llama serie o desarrollo de Taylor de $f(x)$ en el punto $x=a$. En el caso $a=0$, es decir si el desarrollo es en el origen, se llama serie o desarrollo de Maclaurin de la función $f(x)$.

La igualdad (15) no se cumple necesariamente para todo valor de $x$, sino solamente en el intervalo de convergencia de la serie del segundo miembro.

### 8.8.3 Algunas series de potencias importantes

En la práctica se utilizan frecuente son:

1. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}...$ , $-\infty<x<\infty$.
2. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}...$ , $-\infty<x<\infty$.
3. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...$ , $-\infty<x<\infty$.
4. $\ln|1+x|=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}...$ , $-1<x\leq 1$.
5. $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}...$, $-1\leq x\leq 1$.
6. $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+...\ |x|<1$.
7. $(1+x)^p=1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\frac{p(p-1)(p-1)}{3!}x^3+...$

ésta es la llamada serie binómica.

a) Si $p$ es un número natural, la serie se reduce a un polinomio.

b) Si $p \geq 0$, pero no entero, la serie converge (absolutamente) para $-1 \leq x \leq 1$.

c) Si $-1 < p < 0$, la serie converge para $-1 < x < 1$.

d) Si $p \leq -1$, la serie converge para $-1 < x < 1$.

Una serie de potencia se puede derivar e integrar término a término, en el interior del intervalo de convergencia.

Ejemplo 8.9. Puesto que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}... \quad (16)$$

entonces derivando tenemos

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \frac{9x^8}{9!}... \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}... \quad (17) \end{aligned}$$

Como la serie (16) converge en $-\infty < x < \infty$; la serie (17) converge también en $-\infty < x < \infty$.

## 8.9 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Escribir los primeros cuatro términos de la sucesión $\{a_n\}$ con a) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, b) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$.
   Solución. a) Haciendo $n = 1, 2, 3, 4.$; obtenemos

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, ...$$

   b) Haciendo $n = 1, 2, 3, 4$; obtenemos

$$\frac{1}{1}, -\frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, -\frac{1}{4!}, ...$$

2. Escribir los primeros cuatro términos de la sucesión $\{a_n\}$ con

$$a_n = \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{1.3.5...(2n-1)}$$

   Solución. Haciendo $n = 1, 2, 3, 4$; obtenemos

$$-\frac{x}{1}, \frac{x^3}{1 \cdot 3}, -\frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5}, \frac{x^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}, ...$$

3. Hallar los primeros 6 términos de la sucesión de Fibonacci $\{a_n\}$ con $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ y $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.
   Solución. Puesto que $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2 \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3 \\ a_5 &= a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5 \\ a_6 &= a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8 \end{aligned}$$

4. Determinar si la siguiente sucesión es convergente o divergente

$$\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$$

5. Solución. Observando los términos de la sucesión vemos que el término n-ésimo de la sucesión es $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$ la sucesión es convergente. Converge a 1.

6. Determinar si la siguiente sucesión es convergente o divergente.

$$\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{-7}{8}, \ldots$$

   Solución. Observando los términos de la sucesión vemos que el término n-ésimo de la sucesión es $a_n = (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2n}$. Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2n} = \begin{cases} 1, \text{ si } n \text{ es impar} \\ -1, \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$$

   deducimos que la sucesión no converge (diverge). Esta es una sucesión oscilante.

7. Determinar la convergencia o divergencia de la sucesión cuyo término n-ésimo es a) $a_n = 2 + \frac{1}{n^2}$, b) $a_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
   Solución. a) Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = 2$$

   la sucesión es convergente. Converge en 2.
   b) Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

   la sucesión es convergente. Converge a 1.

8. Según la definición, mostrar que la sucesion

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$$

converge a 1.
Solución. Sea $\varepsilon > 0$; debemos encontrar un $N$ tal que

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$$

vemos que podemos tomar $N = \frac{1}{\varepsilon}$ para que se cumpla (1). Luego, el límite de la sucesión dada es 1. (es decir, la sucesión converge a 1).

9. Según la definición, mostrar que el límite de la sucesión

$$\left\{\frac{2n-4}{3n+2}\right\}$$

es $\frac{2}{3}$.
Solución. Sea $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar un $N$ tal que

$$\left|a_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon, \text{ para } n \geq N \qquad (1)$$

considerando

$$\left|\frac{2n-4}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{-16}{3\,(3n+2)}\right| < \varepsilon$$

vemos que $\frac{16}{3\varepsilon} < 3n+2$, $\frac{16-2\varepsilon}{9\varepsilon} < n$. Entonces podemos tomar $N = \frac{16-2\varepsilon}{9\varepsilon}$ para que se cumpla (1). Luego, el límite de la sucesión dada es $\frac{2}{3}$.

**SERIES**

10. Determinar la convergencia o divergencia de las series a) $\sum 2^n$, b) $\sum \frac{n+1}{n-1}$.
Solución. a) El término general de la serie es $a_n = 2^n$. Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty \neq 0$$

entonces la serie dada diverge.
b) El término general de la serie es $a_n = \frac{n+1}{n-1}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1 \neq 0$$

entonces la serie dada diverge.

11. Determinar la convergencia o divergencia de las series a) $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.
Solución. a) El término general de la serie es $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$$

entonces la serie dada diverge.
b) El término general de la serie es $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = n$$

entonces no podemos concluir nada. Sin embargo, a la serie dada la reconocemos como una serie $p$ de Riemann, pues

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$$

con $p = \frac{1}{2}$. Como $P < 1$, la serie dada diverge.

12. Aplicando el criteiro de Comparación, determinar la convergencia o divergencia de las series a) $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Solución. a) Comparemos la serie dada con la serie $p$ de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$. Como $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$ y sabiendo que la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente (por ser $p = 2 > 1$) deducimos que la serie dada también converge.
b) Comparemos la serie dada con la serie Armónica $\sum \frac{1}{n}$. Como

$$\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n} \quad n = 2, 3, 4, ...$$

entonces, por ser la serie Armónica divergente, deducimos que la serie dada es divergente.

13. Aplicando el criterio de comparación por el cociente, determinar la convergencia o divergencia de las series a) $\sum \dfrac{1}{n^2 + 4}$; b) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n\,(2n-1)}}$.

Solución. a) Comparemos la serie dada con la serie convergente $\sum \dfrac{1}{n^2}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n^2+4}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+4} = 1,$$

(número), entonces la serie dada es convergente.

**Nota**.- La serie $\sum \dfrac{1}{n^2}$ es convergente porque es una serie $p$ de Riemann, con $p = 2 > 1$.

b) Comparemos la serie dada con la serie divergente $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n\,(2n-1)}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n\,(2n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2n-1}} = 0,$$

(número), entonces, la serie dada es divergente.

**Nota**. La serie $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente porque es una serie Riemann, con $p = \dfrac{1}{2} < 1$.

14. Aplicando el criterio del cociente, determinar la convergencia o divergencia de las series a) $\sum \frac{n}{3^n}$, b) $\sum \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$.
Solución. a) Aplicando el criterio del Cociente tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} < 1,$$

entonces la serie dada es convergente.
b) Aplicando el criterio del Cociente tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{(n+1)^2} = 0 < 1,$$

entonces la serie dada es convergente.

15. Aplicando el criterio del Cociente, determinar la convergencia o divergencia de las series a) $\sum \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$, b) $\sum \frac{(n+1)\, 2^n}{n!}$.
Solución. a) Aplicando el criterio del Cociente tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(\ln 2)^{n+1}} \cdot \frac{(\ln 2)^n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln 2} \frac{(n+1)^3}{n^3} = \frac{1}{\ln 2} > 1,$$

entonces, la serie dada es divergente.
b) Aplicando el criterio del Cociente tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\, 2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)\, 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,(n+2)}{(n+1)^2} = 0 < 1,$$

entonces, la serie dada es convergente.

16. Aplicando el criterio de la Raíz, determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series: a) $\sum \frac{1}{n^n}$, b) $\sum \frac{1}{(\ln\, n)^n}$.
Solución. a) Aplicando el criterio de la Raíz tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1,$$

entonces, la serie dada es convergente.
b) Aplicando el criterio de la Raíz tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

entonces, la serie dada es convergente.

17. Aplicando el criterio de la Raíz, determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series

$$\text{a)} \sum \frac{3^n}{m^3} \quad , \qquad \text{b)} \sum \frac{n}{(n+1)\, e^n}$$

Solución. a) Aplicando el criterio de la Raíz tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3} = \frac{3}{1} = 3 > 1$$

entonces, la serie dada es divergente.
a) Aplicando el criterio de la Raíz tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(n+1)\, e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(\sqrt[n]{n+1}\right) \cdot e} = \frac{1}{1 \cdot e} = \frac{1}{e} < 1$$

entonces, la serie dada es convergente.

18. Aplicando el criterio de la Integral, determinar la convergencia o divergencia de las series

$$\text{a)} \sum \frac{n}{n^2 - 1} \ , \ \text{b)} \sum \frac{1}{n \cdot \ln n} \quad , \quad \text{c)} \sum n e^{-n^2}$$

Solución. a) Como $a_n = \dfrac{n}{n^2-1}$, tomando $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x)\, dx &= \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln(\infty) - \ln 2\right] = \frac{1}{2} (\infty - \ln 2) = \infty \end{aligned}$$

Entonces, la serie dada diverge.
b) Como $a_n = \dfrac{1}{n \ln n}$, tomamos $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ tenemos

$$\int_2^{\infty} f(x)\, dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln x)|_2^{\infty} = \ln\left[\ln(\infty) - \ln(\ln 2)\right] = \infty$$

entonces, la serie dada diverge.

19. Como $a_n = n e^{-n^2}$, tomando $f(x) = x e^{-x^2}$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x)\, dx &= \int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}\Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{2}\left(e^{-\infty} - e^{-1}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(0 - e^{-1}\right) = \frac{1}{2} e^{-1} \text{ (número)} \end{aligned}$$

entonces, la serie dada converge.

20. Aplicando el criterio de la Integral, estudiar la convergencia de la serie $p$ de Rieman.

$$\sum \frac{1}{n^p}$$

Solución. Como $a_n = \dfrac{1}{n^p}$, tomemos la función $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$.
Si $p \neq 1$:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} &= \int_1^{\infty} x^{-p}dx = \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^{\infty} = \frac{\infty^{1-p} - 1}{1-p} \\
&= \begin{cases} \infty & , \text{si} \quad p < 1 \\ \dfrac{-1}{1-p} & , \text{si} \quad p > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

entonces, la serie diverge si $p < 1$ y converge si $p > 1$.
Si $p = 1$:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x|_1^{\infty} = \ln \infty - \ln 1 = \infty$$

entonces, la serie diverge si $p = 1$.

21. Determinar si las series alternadas siguientes son condicional o absolutamente convergentes

$$\text{a)} \sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad , \quad \text{b)} \sum (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n}$$

Solución. a) Primeramente averiguemos si la serie es absolutamente convergente. Aplicando el criterio del Cociente a la serie de valores absolutos tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1} = 1$$

el criterio falla. Observando la serie de valores absolutos (sin signos negativos).

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

vemos que se trata de una serie $p$ de Rieman divergente (pues $p = \frac{1}{2}$), entonces la serie no es absolutamente convergente. Para ver si es condicionalmente convergente vamos a ver si se cumple

$$a_{n+1} < a_n \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n+1}} &< \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (es decir, } a_{n+1} < a_n) \text{ y} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} &= 0 \text{ (es decir, } \lim_{n\to\infty} a_n = 0)
\end{aligned}$$

Por tanto, la serie dada convergen condicionalmente.
**Nota**. Se deduce que la serie es convergente, pero como no es absolutamente convergente decimos que es condicionalmente convergente.
b) Primero averiguamos si la serie es absolutamente convergente (en tal caso ya no queda nada por hacer). Aplicando el criterio del cociente a la serie de valores absolutos tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Entonces, la serie dada es absolutamente convergente.

22. Determinar si las series alternadas siguientes son condicional o absolutamente convergentes.

$$\text{a) } \sum (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^3} \quad , \quad \text{b) } \sum (-1)^{n-1}\frac{1}{3n-1}$$

Solución. a) Primeramente averiguemos si la serie es absolutamente convergente. Aplicando el criterio del Cociente a la serie de valores absolutos tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{[2(n+1)-1]^3}\frac{(2n-1)^3}{1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^3}{(2n-1)^3} = 1\end{aligned}$$

el criterio falla.
Comparemos con la serie convergente $\sum \frac{1}{n^3}$ usando el criterio de Comparación por el cociente.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n-1)^3}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(2n-1)^3} = \frac{1}{2^3} \text{ (número)}$$

entonces, la serie dada es absolutamente convergente.
b) Primero veamos si la serie es absolutamente convergente. Comparamos con la serie divergente $\sum \frac{1}{n}$ aplicando el criterio de Comparación del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3} \text{ (número)}$$

entonces, la serie dada es absolutamente convergente.

23. Determinar si es condicional o absolutamente convergente la serie alternada

$$\sum \frac{(-1)^n}{n \ln n}$$

Solución. Primero veamos si la serie es absolutamente convergente. Por el ejercicio 17b la serie de valores absolutos $\sum \frac{1}{n \ln n}$ es divergente, entonces la serie alternada dada no es absolutamente convergente. Veamos si es condicionalmente convergente:
Como

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{1}{n \ln n} \quad \text{(es decir, } a_{n+1} < a_n\text{)}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0 \text{ (es decir, } \lim_{n\to\infty} a_n = 0\text{)}$$

entonces, la serie dada es condicionalmente convergente.
**MISCELANEA DE PROBLEMAS SOBRE SERIES**
En los siguientes ejercicios estudiar la convergencia de la serie dada (es decir, determinar si es convergente o divergente cuando la serie es de términos positivos, y la convergencia absoluta o condicional si la serie es alternada).

24. $\sum \frac{n}{(n+1)(n+2)}$.
Solución. Como en el término general $a_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$ solamente intervienen polinomios, apliquemos el criterio de Comparación por el cociente comparándo la serie dada con la serie divergente $\sum \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1 \text{ (número)}$$

entonces la serie dada es divergente.

25. $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$.
Solución. Como en el término general $a_n = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ solamente intervienen polinomios, apliquemos el criterio de comparacion por el cociente comparando la serie dada con la serie convergente $\sum \dfrac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(2n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2^2} \text{ (numero)}$$

entonces la serie dada es convergente.

26. $\sum \frac{n}{e^n}$.
Solucion. Procedimiento 1. Aplicando el criterio del cociente tenemos>

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{e} < 1$$

entonces la serie es convergente.
Procedimiento 2. Aplicando el criterio de la Raiz tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

entonces la serie es convergente.

27. $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Solucion. Esta serie es simplemente una serie $p$ de Rieman con $p = \frac{1}{3}$ como $p < 1$, la serie es divergente.

28. $\sum \frac{1}{n^n - 1}$.
Solucion. Aplicando el criterio de la Raiz tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n - 1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$$

entonces, la serie es convergente.

29. $\sum \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$.
Solución. Aplicando el criterio del cociente tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{(n+1)^2} = 0 < 1$$

entonces la serie es convergente.

30. $\sum \frac{4^n}{n!}$.
Solución. Aplicando el criterio del cociente tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n+1} = 0 < 1$$

entonces la serie es convergente.

31. $\sum \frac{3^{2n-1}}{n^2 - n}$.
Solución. Aplicando el criterio del cociente tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+!}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+1}}{(n+1)^2 - (n+1)} \cdot \frac{n^2 - n}{3^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^2\left(n^2 - n\right)}{(n^2 + n)} = 3^2 > 1$$

entonces la serie es divergente.

32. $\sum \dfrac{n+1}{n\sqrt{3n-2}}$.
Solución. Como el término general $a_n = \dfrac{n+1}{n\sqrt{3n-2}}$ esta formado solamente por polinomios y raíces de polinomios, apliquemos el criterio de comparación por el cociente comparandola con la serie divergente $\sum \dfrac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n+1}{n\sqrt{3n-2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\sqrt{n}}{n\sqrt{3n-2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (número)}$$

entonces, la serie dada es divergente.

33. $\sum n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
Solución. Debido a la presencia de una potencia n-esima en el término general, aplicamos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\cdot\frac{3}{4} = 1\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4} < 1$$

entonces la serie es convergente.

34. $\sum \dfrac{2^n}{n\,(n+2)}$.
Solución. Aunque el término general presenta una potencia n-esima, es mas conveniente aplicar el criterio del cociente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)\,(n+3)}\cdot\frac{n\,(n+2)}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n\,(n+2)}{(n+1)\,(n+3)} = 2 > 1$$

entonces, la serie es divergente.

35. $\sum \left|\sin\dfrac{1}{n}\right|$.
Solución. Comparándola con la serie divergente $\sum \dfrac{1}{n}$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sin\dfrac{1}{n}\right|}{\dfrac{1}{n}} = 1 \text{ (numero)}$$

entonces la serie dada es divergente.

36. $\sum \dfrac{n^2+1}{n^3+1}$.
Solución. Como el término general esta formado solamente por polinomios,

la comparamos con la serie divergente $\sum \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+1}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(n^2+1\right)}{n^3+1} = 1 \text{ (numero)}$$

entonces la serie dada es divergente.

37. $\sum \frac{n!}{(2^n+1)}$.
Solución. Aplicando el criterio del cociente tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+!)!}{2^{n+1}+1} \cdot \frac{2^n+1}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{2} \frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}+1}\right) \\ &= \infty (1-0) = \infty > 1 \end{aligned}$$

entonces la serie es divergente.

38. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
Solución. Aplicando el criterio del cociente tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1$$

entonces la serie es convergente.

39. $10 + \frac{10 \cdot 12}{1 \cdot 4} + \frac{10 \cdot 12 \cdot 14}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \cdots + \frac{10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot \cdots \cdot (8+2n)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (8+2n)} + \cdots$
Solución. Aplicando el criterio del cociente tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot \cdots \cdot (8+2n)(10+2n)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n-2)(3n+1)} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3n-2)}{10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot \cdots \cdot (8+2n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{10+2n}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}$$

entonces, la serie es convergente.

40. $\frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \cdots + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14 \cdot \cdots \cdot (6n-7)(6n-4)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \cdots \cdot (8n-11)(8n-7)}$.
Solución. Aplicando el criterio del cociente tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot (6n-7)(6n-4)(6n-1)(6n-2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (8n-11)(8n-7)(8n-3)(8n+1)} \cdot \\ &\quad \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \cdots \cdot (8n-11)(8n-7)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (6n-7)(6n-4)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(6n-1)(6n+2)}{(8n-3)(8n+1)} = \frac{36}{64} < 1 \end{aligned}$$

entonces, la serie es convergente.

41. $1+\dfrac{1\cdot 4}{1\cdot 5}+\dfrac{1\cdot 4\cdot 9}{1\cdot 5\cdot 9}+\cdots+\dfrac{1\cdot 4\cdot 9\cdot\cdots\cdot n^2}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\cdots\cdot(4n-3)}+\cdots$
Solución. Aplicando el criterio del cociente tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot\cdots\cdot n^2\,(n+1)^2}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\cdots\cdot(4n-3)\,(4n+1)}\cdot\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\cdots\cdot(4n-3)}{1\cdot 4\cdot 9\cdot\cdots\cdot n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(4n+1)}=\infty>1\end{aligned}$$

entonces, la serie es divergente.

42. $\displaystyle\sum\frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)\,(5\sqrt[n]{n}-1)}$.
Solución. Como el término general de la serie esta formada solamente por polinomios y raices de polinomios, comparamos la serie dada con la serie divergente $\sum\dfrac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[n]{n}}{(2n-1)\,(5\sqrt[n]{n}-1)}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{n}}{(2n-1)\,(5\sqrt[3]{n}-1)}=\frac{1}{10}\ \text{(numero)}$$

entonces, la serie dada, es divergente.

43. $\sum\dfrac{2+\sin n}{n^2}$.

Solución. Comparando con la serie convergente $\sum\dfrac{2}{n^2}$ tenemos que

$$\frac{2+\sin n}{n^2}\le\frac{2}{n^2}$$

es decir

$$a_n\le b_n$$

entonces la serie dada es convergente. (ver criterio de Comparacion Pág. ##).
Nota. La serie $\sum\dfrac{2}{n^2}=2\sum\dfrac{1}{n^2}$ es convergente porque es una serie de $p$ de Riemann con $p=2>1$.

44. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\right)^2+\left(\dfrac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\right)^2+\cdots\cdot+\left(\dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdots\cdot(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\cdots\cdot(3n)}\right)^2+\cdots$
Solución. Aplicando el criterio del Cociente tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdots\cdot(3n-2)\,(3n+1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\cdots\cdot(3n)\,(3n+3)}\right]^2\left[\frac{3\cdot 6\cdot 9\cdot\cdots\cdot(3n)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdots\cdot(3n-2)}\right]^2\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^2}{(3n+3)^2}=\frac{3^2}{3^2}=1\end{aligned}$$

el criterio falla.
Aplicando el criterio de Raabe tenemos

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+!}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left\{1-\frac{(3n+1)^2}{(3n+3)^2}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\,(12n+8)}{9n^2+18n+9} = \frac{12}{9} > 1$$

entonces, la serie es convergente.

45. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 + \cdots + \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}\right]^2 + \cdots$
Solución. Aplicando el criterio del Cociente tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\,(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)\,(2n+2)}\right]^2\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right]^2\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = \frac{2^2}{2^2} = 1\end{aligned}$$

por lo que el criterio falla.
Aplicando el criterio de Raabe tenemos

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left\{1-\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\,(4n+3)}{4n^2+8n+4} = \frac{4}{4} = 1$$

el criterio falla.
Nos queda el criterio de Gauss. Para aplicar este criterio debemos dividir $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ y expresarlo como

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1-\frac{L}{n}+\frac{c_n}{n^2}$$

procediendo tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} = 1-\frac{1}{n}+\frac{5+\frac{4}{n}}{4n^2+8n+4}$$

dividiendo como polinomio

$$= 1+\frac{1}{n}+\frac{n^2\left(\dfrac{5+\frac{4}{n}}{4n^2+8n+4}\right)}{n^2}$$

de donde

$$L = 1$$

y

$$c_n = \frac{n^2\left(5+\dfrac{4}{n}\right)}{4n^2+8n+4}$$

como

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(5+\dfrac{4}{n}\right)}{4n^2+8n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+4n}{4n^2+8n+4n} = \frac{5}{4} \text{ (numero)}$$

entonces la serie diverge, por ser $L \leq 1$.

46. Hallar la suma de la serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

Solucion. Esta es una serie geometrica de razon $r=\dfrac{1}{2}$, entonces su suma es

$$S=\frac{1}{1-r}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2$$

**SERIES DE POTENCIAS**

47. Determinar el intervalo de convergencia de la serie, estudiar los extremos

$$1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\cdots+\frac{x^n}{2^n}+\cdots \qquad (1)$$

Solución. Aplicando el criterio del cociente tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{2}\right| = \frac{|x|}{2} < 1$$

de donde $|x|<2$, o $-2<x<2$.
En los extremos tenemos: Si $x=2$, la serie dada (1) se reduce a

$$1+1+1+1+\cdots+1+\cdots$$

que es divergente.
Si $x=-2$, la serie dada se reduce a

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots$$

que es oscilante y, por tanto divergente.
Entonces el intervalo de convergencia es $-2<x<2$.

48. Determinar el intervalo de convergencia de la serie, estudiar los extremos

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}\,x^{2n-1}}{2n-1}$$

Solución. Aplicando el criterio del cociente tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+2}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+2}x^2\right| = \left|x^2\right| < 1$$

de donde $|x| < 1$ ó $-1x < 1$.
En los extremos tenemos: Si $x = -1$, la serie se reduce a

$$\sum (-1)^{n-1}\frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} = \sum \frac{1}{2n-1}$$

comparándola con la serie divergente $\sum \frac{1}{n}$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}\ \text{(numero)} \qquad (1)$$

entonces la serie diverge en $x = -1$.
Si $x = 1$, la serie se reduce a

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Procediendo como en (1) se ve que esta serie no converge absolutamente.
Pero como

$$\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n-1}\ \text{(es decir } a_{n+1} < a_n\text{)}$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1} = 0\ \text{(es decir, } \lim_{n\to\infty} a_n = 0\text{)}$$

Entonces converge condicionalmente en $x = 1$.
Por tanto, el intervalo de convergencia es $-1 < x \leq 1$.

49. Determinar el intervalo de convergencia de la serie, estudiar los extremos

$$\sum \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Solución. Aplicando el criterio del cociente tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}(x-1)\right| = |x-1| < 1$$

de donde $-1 < x-1 < 1$ ó $0 < x < 2$. En los extremos tenemos:
Si $x = 0$, la serie se reduce a

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Esta serie no es absolutamente convergente (pues, como es sabido, la serie de valores absolutos $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente). Pero como

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (es decir, } a_{n+1} < a_n)$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ (es decir, } \lim_{n\to\infty} a_{n=0})$$

La serie es condicionalmente convergente en $x = 0$.
Si $x = 2$, la serie se reduce a

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

que, como es sabido, es divergente. Por tanto, el intervalo de convergencia es $0 \leq x < 2$.

50. Desarrollar $\frac{1}{1-x}$ en potencias de $x$ y determinar su intervalo de convergencia.
Solución. Podriamos derivar sucesivamente la función. evaluar en $x = 0$ y aplicar la fórmula del desarrollo de Taylor. En este caso es mas fácil dividir, de donde

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

Aplicando el criterio del cociente determinamos su intervalo de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x| < 1$$

En el extremo $x = 1$ la serie es divergente y en $x = -1$ es tambien divergente (pues es oscilante). Entonces su intervalo de convergencia es $-1 < x < 1$.

51. Desarrollar $e^x$ en potencias de $x$ y determinar su intervalo de convergencia.
Solución. Derivando sucesivamente y evaluando en $x = 0$ tenemos

$$f(x) = e^x \quad , \quad f'(x) = e^x \quad , \quad f''(x) = e^x \quad , \quad f'''(x) = e^x \quad , \cdots , \quad f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f(0) = 1 \quad , \quad f'(0) = 1 \quad , \quad f''(0) = 1 \quad , \quad f'''(0) = 1 \quad , \cdots , \quad f^{(n)}(0) = 1$$

Entonces, por la formula del desarrollo de Taylor, tenemos:

$$\begin{aligned} e^x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (1) \end{aligned}$$

Para determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencias (1) aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}x\right| = 0 < 1,$$

entonces la serie (1) converge para todo $x$, es decir el intervalo convergencia es $-\infty < x < \infty$.

52. Desarrollar $\ln x$ en potencias de $x-2$ y determinar el intervalo de convergencia.
Solución. derivando sucesivamente y evaluando en $x = 2$ tenemos:

$$f(x) = \ln x \quad , \quad f'(x) = x^{-1} \quad , \quad f''(x) = -x^{2} \quad , \quad f'''(x) = 2x^{-3} \quad ,\cdots, \quad f^{IV}(x) = -6x^{-4}, ...$$

$$f(2) = \ln 2 \quad , \quad f'(2) = \frac{1}{2} \quad , \quad f''(2) = -\frac{1}{4} \quad , \quad f'''(2) = \frac{1}{4} \quad ,\cdots, \quad f^{IV}(2) = -\frac{3}{8}, ...$$

Entonces, por la fórmula de Taylor, tenemos

$$\begin{aligned}\ln x &= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{(x-2)^3}{3!} - \frac{3}{8}\frac{(x-2)^4}{4!} \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n2^n}(x-2)^n \qquad (1)\end{aligned}$$

Aplicando el criterio del cociente determinamos el intervalo de convergencia de la serie (1):

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{x\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}}\frac{n2^n}{(x-2)^n}\right| = \lim_{x\to\infty}\left|\frac{n}{2(n+1)}(x-2)\right| = \frac{|x-2|}{2} < 1$$

De donde $|x-2| < 2$ ó $-2 < x-2 < 2$, ó $0 < x < 4$. En el extremo $x = 0$, la serie se reduce a $\ln 2 + \sum (-1)^{n-1}\frac{(-2)^n}{n2^n} = \ln 2 - \sum \frac{1}{n}$ que es divergente (como es sabido, la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ es divergente). En el extremo $x = 4$, la serie se reduce a $\ln 2 + \sum (-1)^{n-1}\frac{2^n}{n2^n} = \ln 2 + \sum (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ que, como sabemos (ejemplo 4), es condicionalmente convergente. Por tanto, el intervalo de convergencia de la serie (1) es $0 < x \le 4$.

53. Obtener el desarrollo de $\frac{1}{1+x}$ en potencias de $x$.
Solución. Como

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ..., |x| < 1$$

reemplazando $-x$ por $x$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-(-x)} &= 1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+...+(-x)^n+..., |-x|<1 \\ \frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+..., |-x|<1\end{aligned}$$

**Nota**. Notemos que el intervalo de convergencia de $\frac{1}{1+x}$ también se obtiene reemplazando $-x$, en lugar de $x$, en el intervalo de convergencia de $\frac{1}{1-x}$.

54. Obtener el desarrollo de $e^{-x^2}$ en potencias de $x$.
Solución. Como

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^n}{n!}+..., |x|<\infty$$

reemplazando $-x^2$ por $x$ obtenemos:

$$\begin{aligned}e^{-x^2} &= 1+\left(-x^2\right)+\frac{\left(-x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(-x^2\right)^3}{3!}+\frac{\left(-x^2\right)^4}{4!}+...+\frac{\left(-x^2\right)^n}{n!}+..., \left|-x^2\right|<\infty \\ e^{-x^2} &= 1+x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+..., |x|<\infty\end{aligned}$$

**PROBLEMAS VARIOS**

55. Obtener el desarrollo de $\ln|1+x|$ en potencias de $x$.
Solución. Como

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+...+(-1)^{n-1}x^n+..., |x|<1$$

entonces, integrando obtenermos

$$\ln|1+x| = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n+1}+..., |x|<1$$

**Nota**. El desarrollo de $\frac{1}{1+x}$ se ha obtenido en el ejercicio 52. Puede obtenerse también directamente por división que en el extremo $x=1$ la serie de $\ln|x+1|$ es condicionalmente convergente.

56. Obtener el desarrollo de $\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ en potencias de $x$.
Solución. Como el desarrollo de $\ln|1+x|$ es

$$\ln|1+x| = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-... \quad (-1<x\leq -1) \quad (1)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\ln|1-x| &= (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} - \frac{(-x)^4}{4} + ... \quad (-1 < -x \leq 1) \\
&= -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + ...\right) \qquad (-1 > x \geq -1) \quad (2)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| &= \ln|1+x| - \ln|1-x| \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right) + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + ...\right) \\
&= 2\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + ...\right) \qquad (3)
\end{aligned}$$

La serie es convergente en el intervalo común a los intervalos de convergencia de las series (1) y (2), es decir: $-1 < x < 1$.

57. Desarrollar $\cos^2 x$ en potencias de $x$.
Solución. Por identidad trigonométrica: $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ (1). Reemplazando $2x$ en lugar de $x$ en

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - ..., |x| < \theta$$

obtenemos

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \frac{2^8}{8!}x^8 - ..., |x| < \infty$$

Por tanto, reemplazando en (1) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\cos^2 x &= \frac{1}{2}\left(1 + 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \frac{2^8}{8!}x^8 - ...\right), \ |x| < 0 \\
&= 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 + \frac{2^7}{8!}x^8 - ..., |x| < 0
\end{aligned}$$

58. Utilizando desarrollos en serie, calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.
Reemplazando los respectivos desarrollos en serie y operando tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ...\right)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2x + \frac{2x^3}{3!} - ...}{x - \frac{x^3}{3!} + ...} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{x^3}{3}}{1 - \frac{x^2}{6}} = 2
\end{aligned}$$

59. Utilizando desarrollos en serie, calcular

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

Solución. Reemplazando los respectivos desarrollos en serie y operando tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^1 \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...\right) dx \\
&= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + ...\Big|_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + ... = 0.946083
\end{aligned}$$

**Nota**. Se han tomado solamente los cuatro primeros términos del desarrollo, por tanto el error cometido es menor que el valor absoluto del quinto término. Es decir

$$\text{error cometido } \leq \frac{1}{9 \cdot 9!} = 0.0000003$$

## 8.10 EJERCICIOS PROPUESTOS

**SUCESIONES**

Escribir los primeros cuatro términos de la sucesión $\{a_n\}$ cuyo término n-ésimo está dado por

1. $a_n = \dfrac{3n-2}{n^2+1}$.

2. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1} n}{2^n}$.

3. $a_n = \dfrac{2 + (-1)^n}{n^2}$.

4. $a_n = \dfrac{(2 + \sin(n\pi/2)) \cos n\pi}{n!}$.

5. $a_n = \dfrac{(2x)^{n-1}}{(2n-1)^5}$.

6. $a_n = \dfrac{(-1)^n \times x^{2n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}$

7. Mostrar que el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci está dado por

$$a_n = \frac{(a^n - b^n)}{\sqrt{5}}$$

con

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \\ b &= \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

Determinar, en cada caso, si la sucesión $\{a_n\}$ dada es convergente o divergente, en caso de que sea convergente hallar su límite:

8. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, ...$

9. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$

10. $\left\{\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$.

11. $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$.

Según la defínción, mostrar que

12. La sucesión $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ converge a 1.

13. La sucesión $\left\{\frac{n-1}{3n+1}\right\}$ convergente a $\frac{1}{3}$.

14. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = 1$, $p > 0$. (Sugerencia: $n^{p/n} = e^{(p\ln n)/n}$).

**SERIES DE TERMINOS POSITIVOS**

Determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series

15. $\sum \frac{2}{n(n+1)}$.

16. $\sum \frac{n+1}{n^2(n+2)}$.

17. $\sum \frac{n^{2n}}{e^n}$.

18. $\sum \frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

19. $\sum \frac{1}{n^3-1}$.

20. $\sum \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

21. $\sum \frac{1}{n^{n+1}}$.

22. $\sum \frac{(n+1)(n+3)}{n!}$.

23. $\sum \frac{5^n}{n!}$.

24. $\sum \frac{10^n}{3^n+1}$.

25. $\sum \frac{n}{2^{2n}}$.

26. $\sum n\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

27. $\sum \frac{n+1}{n^2\sqrt{1-n}}$.

28. $\sum (32)^n n^3$.

29. $\sum 2^n n^3$.

30. $\sum \frac{n!}{n^n}$.

31. $\sum \frac{n^2}{2^n}$.

32. $\sum \left(\frac{n}{n^2+2}\right)^n$.

33. $\sum \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n+3}}$.

34. $\sum \frac{2^n}{n \cdot 5^n}$.

35. $\sum \frac{2n-10n^2}{(3n+2)\, n^{4/3}}$.

36. $\sum \frac{4n^2+5n-2}{n\left(n^2+1\right)^{3/2}}$.

37. $\sum \frac{1}{n\left(\ln n\right)^3}$.

38. $\sum \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

39. $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right) n^2$.

40. $\sum \frac{n!}{10^n}$.

41. $\sum \frac{1}{n\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}$.

42. $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$.

43. $\sum \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$.

44. $\sum \frac{e^n n!}{n^n}$.

45. $\sum \frac{\ln n}{n}$.

46. $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

47. $\sum \frac{\ln n}{n^p}$.

48. $\sum \frac{(\ln n)^2}{n^2}$.

49. $\sum \frac{3 + \sin(n)}{n(1 + e^{-n})}$

50. $\sum n \cdot \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$.

51. $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

52. $\sum \frac{2^{\ln(\ln n)}}{n \cdot \ln n}$.

53. $\sum \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln(\ln n)}$.

54. Mostrar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}$. a) Es convergente, cualquiera que sea $q$, si $p > 1$; y cuando $q > 1$ si $p = 1$, b) es divergente, cualquiera que sea $q$, si $p < 1$; y cuando $q \leq 1$, si $p = 1$.

55. Mostrar que

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ...+ = \frac{a}{1-r}, \ |r| < 1$$

56. Hallar la suma de las series a) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (Sugerencia: Verificar que $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$ y tomar el límite.

**SERIES ALTERNAS**

Determinar si las siguientes series son condicional o absolutamente convergente.

57. $\sum (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n}$.

58. $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$.

59. $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln n}$

60. $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$.

61. $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$.

62. $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2+2}$.

63. $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^3}$.

64. $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

65. $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2+2}$.

66. $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{(n!)^3}$.

67. $\sum (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$.

68. $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

**PROBLEMAS VARIOS SOBRE SERIES**

69. Explicar: Si $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$ Entonces $S = 1 - (1-1) - (1-1) ... = 1$. Y también $S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + ... = 0$. Luego $1 = 0$.

70. Si $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$ converge a $S$, demostrar que la serie reagrupada $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + ... = \frac{3}{2}S$. Explicar. (Sugerencia: Tomar $\frac{1}{2}$ en la primera serie y escribirla en la forma $0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + ...$ y sumarla luego término a término con la primera serie. En realidad se tiene que $S = \ln 2$ - Ejercicio resuelto 52 -).

**SERIE DE POTENCIAS**

Determinar el intervalo de convergencia de las siguientes series, estudiar los extremos.

71. $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ....$

72. $\frac{x}{5} - \frac{x^2}{2 \cdot 5^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 5^3} - \frac{x^4}{4 \cdot 5^4} + ...$

73. $\sum \frac{x^n}{n\,(n+1)}$.

74. $\sum (-1)^n \frac{x^n}{n^n}$.

75. $\sum\limits_{n=2} \frac{x^{2n}}{(n-1)\,n\,(n+1)}$.

76. $\sum\limits_{n=2} \frac{x^n}{(\ln n)^n}$.

77. $\sum \frac{(x-2)^n}{n^2}$.

78. $\sum \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$.

Desarrollar la función dada en serie de potencias y determinar el intervalo de convergencia.

79. $\tan x$ en potencias de $x$.

80. $e^{x/2}$ en potencias de $x - 2$.

81. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ en potencias de $x$.

82. $\sin^2 x$ en potencias de $x$.

83. $\arctan x$ en potencias de $x$ (sugerencia: $\arctan x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$).

84. $\arcsin x$ en potencias de $x$ (sugerencia: Usar la serie binómica para desarrollar $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, además $\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$).

85. Mostrar que a) $xe^x = \sum \frac{n}{n!} x^n$. b) $\sum \frac{n}{n!} = e$.

86. Mostrar que a) $\left(x^2 + x\right) e^x = \sum \frac{n^2}{n!} x^n$, b) $\sum \frac{n^2}{n!} = 2e$. Obtener c) $\sum \frac{n^3}{n!} 5e$ y $\sum \frac{n^4}{n!} 15e$.

**PROBLEMAS VARIOS SOBRE SERIES DE POTENCIA**

87. Utilizando desarrollos en serie, calcular $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sin x}{\sinh x}$.

88. Utilizando desarrollos en serie, calcular $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx = 0.76355$.

89. Utilizando desarrollos en serie, calcular $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1 + x^4)} = 0.4940$.